DE MAXIMIS ET MINIMIS AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMODATIS...

Jacopo Andrea Tommasini

5.7.220

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATIS

SPECIMEN

REGIAE CELSITUDINI

SERENISSIMI

PETRI = LEOPOLDI

ARCHIDUCIS AUSTRIAE,

HUNGARIAE AC BOEMIAE PRINCIPIS,

NEC NON

MAGNI ETRURIAE DUCIS

&c. &c. &c.

DICATUM

AUCTORE

JACOBO = ANDREA TOMMASINI M. D.

ET IN ALMO PISANO LYCAEO

PUBL. MATH. SUBLIMIOR. PROF.

PISIS ANNO MDCCLXXIV.

EX TYPOGRAPHIA FRATRUM PIZZORNI. *Cum Facultate.*

5. 1. 22.

REGIA CELSITUDO

QUum diù multumque dubitaverim, an mihi fas eſſet REGIAE TUAE CELSITUDINI hanc qualemcumque meam de Maximis & Minimis Opellam dedicare, animum tandem erexit FERDINANDI II. Medicei Magni Etruriae Ducis Humanitas, qua Vincentij Viviani haud abſimili ſuper argumento Opus egregium in ſuae clientelae praeſidium adſciſcere minime detrectavit. Fateor equidem, me ingenio ac doctrina haudquaquam eſſe tanto cum Viro comparandum; veruntamen ſcio, quantum apud Te, Principum Clementiſſime, in precio habeantur Mathematicae Diſciplinae univerſae, atque eae potiſſimum, quae Juventutis Etruſcae profectui magis conducunt. Alacrior praeterea ſum factus, quòd animadverterim, Tuarum Virtutum ſummam intra hoſce tantummodo fines non coërceri. Quis enim ignorat, quantopere ceteras omnes nobiles Facultates ſoveas ac tuearis, quot praemijs & honoribus afficias? Cui compertum non eſt,

quantum Ipſe quoque excellas in Philoſophicis, praecipueque in ea Ethices parte, qua docemur, temperandis perturbationibus, eradendiſque cupiditatum elementis animum vincere? Quem fugit, quot amoris, & munificentiae praebeas argumenta in Populis imperio Tuo ſubiectis gubernandis, nullis enim mentis, corporiſque laboribus parcis, ut eos perbeatos efficias? Satis eſt Te ſemel intueri, tecumque colloqui, ac verſari, ut in amorem Tui nemo non confeſtim arripiatur; teſtis Vindobona, teſtis Neapolis, teſtis Roma: hae ſiquidem Urbes tanto praeclararum Tuarum laudum, ac Virtutum ſtudio, & admiratione ſunt captae, ut ibi nullo unquam tempore tanti Principis memoria ſit interitura. Hoc optima Tuorum Auguſtiſſimorum Parentum inſtitutio, & educatio, hoc illuſtrium Proavorum Tuorum immortalitate digniſſimorum Exempla pollicebantur.

Sed iſta ceteris praedicanda relinquam, ipſe enim tanto oneri longe impar, eximias Virtutes Tuas admirari ac ſuſpicere dumtaxat contentus, Te ſupplex oro, ut perexiguum hunc laborem meum in fidem & tutelam Tuam excipere non dedigneris, quod Te pro Regia Tua Clementia libenter ac benigne mihi conceſſurum non diffido.

Humillimus Famulus & Subditus
Jacobus Andreas Tommaſini

PRAE-

PRAEFATIO

P*Raeclariſſima de* Maximis, *&* Minimis *Matheſeos pars a ſummis Viris cum veteribus, tum recentioribus nullo non tempore fuit exculta, pulcherrimumque in hoc genere antiquitatis monumentum eſt, ut omnes norunt,* Apollonij Pergæi *Liber, qui* Maxima, *&* Minima *ad ſectiones Conicas pertinentia complectitur: opus non ſine Reipubblicæ Litterariæ detrimento diu in tenebris oblivionis conſepultum, inde verò repertum, cùm* Vincentius Vivianus *ingenioſiſſimam ſuam Divinationem jam perfecerat. Verùm quoad ea* Maxima, *&* Minima, *quae* loca plana, *ut Mathematicorum verbis utar, intuentur, ſeu quae per elementarem Geometriam explanari poſſunt, pauca admodum priſci Geometriae deprehenderunt, vel certe pauca eorum inventa ad nos pervenerunt, quemadmodum ex* Pappi Alexandrini *Collectionibus dignoſcere eſt. Ne iſtiuſmodi Problemata ab ipſis ſolverentur, id in cauſſa fortaſſe fuit, quòd ea non parum difficilia repererint; ſaltem judicio clariſſimorum Geometrarum proxime elapſi ſaeculi ita cenſebantur, propterea quod* Fermatius *duo generis hujuſce Problemata* Torricellio *reſolvenda propoſuit, quae tamen cum* Torricellius, *tum* Vi-

vianus *feliciter enodarunt*, & Cavalerius, *praeclaros eorum conatus imitatus, unius ex hiſce duobus ſolutionem in ſuis Exercitationibus Geometricis (licet in auxilium perperam accerſita ellipſi) continuavit*. P. Honoratus Fabri *doctiſſimus & ipſe ſui temporis Geometra ipſorum Centuriam elaboravit, non nimis tamen fauſto eventu, multa ſiquidem in iis Ploblematis imperfecta, & nonnanquam ſalſa permiſcuit ; multa, ut quem finxerat animo Propoſitionum numerum expleret, futilia invexit, quae vel contrahenda, vel prorſus omittenda videbantur ; multa denique vitioſe peregit tum loca plana in ſolida commutavit ; ex quo dilucescit hujusmodi Problematum per Geometriam communem diſſolvendorum difficultas. Quid plura?* Pappus *ipſe, ſummus ceteroquin Geometra, in ſphaera ſolidorum ſuperficies aequales habentium* maxima *oſtendenda rem acu non tetigit, ſua enim demonſtratio non omnes cylindros rectos, neque omnes conos rectos complectitur, adeoque pro ſuſpecta meritò haberi poterat. Ceteri verò qui idem Theorema ſynthetice tentarunt, polyedra non ſunt praetergreſſi, quare nullus adhuc quod ſciam demonſtrationem geometricam completam quoad ſolida in Inſtitutionibus uſurpata exhibuit..*

Jam quinque circiter anni effluxerunt, ex quo ipſe ab Amico in Mathematicis apprime verſato (a) *excitatus, ſubciſivis plerumque tempori-*

(a) Petrus Giannini Piſcienſis

poribus meas hac in re experiri vires inſtitui, in ijs me Problematis exercens, quae ad elementares Inſtitutiones tantummodo ſpectant, neve ulla Sectione Conica in ijs elaborandis me abuſurum conſtitui, utpote qui ea, quae natura ſui plana ſunt Problemata, ad ſolida revocare, reprehendendum, & a politiori Geometria alienum eſſe cum ſummo Carteſio *perſuaſum haberem, neve me unquam Algebrae Carteſianae, vel* Newtonianae *oraculum, ut ita dicam, conſulturum, ut quorſum ingenij mei vires evaderent, videre poſſem; quod equidem praeſtiti, pauciſſimis exceptis caſibus, in quibus poſtmodum vel deſperatam, vel perdifficilem problematum enodationem comperi.*

Satis bono notabiliorum ſolutionum numero coacto, quum in hiſce diutiùs immorari per neceſſaria ſtudia vetarer, me a novis ſolutionibus indagandis abſtinui. Interea opus illud animo reputans, Adoleſcentibus profuturum ſum arbitratus, quum medium inter Inſtitutiones Geometricas, Conicaſque Sectiones locum obtineat, & aliquod in demonſtrando diſcrimen pro argumenti ab ijsdem Inſtitutionibus diſſimilitudine praeſeferat; accedat, quod aliquam infiniti geometrici priùs ipſis incognitam, & inexpectatam notionem ſubminiſtrat.

In demonſtrationibus synthetica methodo uſus ſum, proptereaque operae pretium eſſe duxi cunctas Propoſitiones per Theoremata enunciare. Et ſane ſi res ad vivum reſecetur, Problema illud

 eſt

eſt, quod analyticam methodum exigit, quam & priſci uſurpabant Geometrae, quippe quum Platoni *tribuatur, vel certe ab ejus* Schola *prodierit.* Euclidi *ſunt Problemata ea, quae ſi eorum explanatio ſynthetica ſpectetur, in Theorematum numerum eſſent referenda. Non ideircò tamen ille culpandus, quum ſaepe contractior, & clarior ſit Problematis enunciatio.*

Algebricis praeterea notis demonſtrationes haſce deſignavi, tum ut verborum brevitati conſulerem, tum ut Adoleſcentum ſtudioſorum commodis inſervirem, qui uno quaſi obtutu totum ratiocinationis ordinem dilucidiùs contuentur, tum ut hiſce notis tempeſtive ipſi aſſueſcant, a veritate enim aberrant ſi qui ſuſpicantur, hujuſcemodi notas methodum ſemper arguere analyticam. Quod ſi noſtra haec Theoremata in vera Problemata, per analyticam Veterum methodum reſoluta, convertere, ad ingenium oſtentandum libuiſſet, per eadem prope veſtigia jam peractae demonſtrationis nobis erat retrogrediendum, & inverſa methodo demonſtratio concinnanda, quae quidem exercitatio Tironibus apprime conducibilis eſſe poteſt; immo verò miror, ex tot Mathematicis, qui novas moliri Inſtitutiones Geometricas affectarant, neminem adhuc extitiſſe, qui ut haec Platonicae Scholae demonſtrandi ratio in ijs emineret, adlaborarit.

Idem Theorema multimodis, ſaltem plerumque, demonſtrare decreveram, ſed ne nimio plus opus

ſecre-

ſuccreſceret, conſilium mutavi, id ad mentem acuendam ſtudioſis Adoleſcentibus praeſtandum relinquens. Eadem quoque de cauſa maximum protinus, aut minimum in Theoremate adeſſe pronunciavi, demonſtrationem hùc tantummodo directam in medium afferre contentus, dignoſcere namque Tiro facile poterit, cur ubi alterum ſuppetit, alterum deſideretur. Itidem maximo aliquo, vel minimo reperto, maxima, vel minima ſecundaria, ſive jam repertis proximiora perſequi, paucis exceptis caſibus, praetermiſi; id enim demonſtratione probe percepta, ſollertia quadam adhibita, ſaepenumero, ſi non ſemper, eruetur. Interea nonnullas demonſtrationes, utpote elegantiores, ac methodo, quam elegeram accommodatas, ab Auctoribus mutuatus ſum, quas, quum in libris editis proſtent, adeoque ſub omnium oculis cadant, ſingillatim hic recenſere, Juventutis profectui unice intentus, ſupervacaneum exiſtimavi.

Denique in toto Opere nullo negocio Tiro animadvertet, omne Theorema, quod maximum exhibet, ſuum Theorema inverſum habere, quod minimum ſufficiat; & rurſus nullum eſſe Theorema, quod minimum enunciet, quin habeat inverſum Theorema, quod maximum includat; praetereaque cùm in Geometricis ſatis profecerit, perſpiciet, hujuſmodi Theoremata, licet loca plana ſint, conducere poſſe maximis, & minimis indagandis cum in Sectionibus Conicis, tum in quibuſdam alijs Curvis, quoties ei libitum ſit,

exer-

exercendi ingenij gratia, ea Geometriae linearis ope perſcrutari.

Si excellentiſſimorum hominum ſententia minime ambigitur, quin de maximis, *&* minimis *doctrina rebus phyſicis ingenti ſit adjumento; ſi magni nominis Mathematici jure conqueruntur, hac tempeſtate ob nimium Analyſeos ſtudium exactam veterum Geometrarum demonſtrandi rationem negligi, ac propemodum in deſuetudinem abiiſſe; ſi* Edmundi Halleij, & Roberti Simpſoni, *ut alios illuſtres Viros praeteream, qui vel in medijs Analyſtarum recentiorum inventis ſe in hac quoque palaeſtra exercere non deſtiterunt, exempla ſunt imitanda; fore confido, ut hic qualiſcumque meus labor haudquaquam injucundus, prorſuſque inutilis habeatur.*

DE

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATIS

P A R S I.

L I B E R I.

De Triangulis, Quadrilateris, & Polygonis.

T H E O R E M A I.

1. EX *omnibus triangulis* DCE, DIE (Fig. 1.) *in eadem baſi* DE *conſtitutis, verticeſque in recta* AB *poſitione data habentibus, triangulum* DCE, *angulos* DCA, ECB *cum recta* AB *aequales efficiens* minima *circumdatur perimetro.*

Dem. Demiſſa ad AB normali EF, produc DC, donec ipſi EF pariter productae occurrat in H, & junge IH. Ob angulos aequales FCH, FCE, erit $HF = FE$, adeoque $CH = CE$, $IH = IE$. Sed DH eſt minima omnium aggregatorum $DI+IH$; ergo etiam aggregatum $DC+CE = DH$, erit minimum omnium $DI+IE = DI+IH$. Poſita igitur DE communi, patet Theorema.

C O R O L L A R I U M.

2. Datis extra rectam AB ex eadem parte duobus punctis D, E, ſi ad ipſam agantur duae rectae DC, CE, quae

in C coëuntes, angulos DCA, ECB aequales efficiant; aggregatum $DG+CE$ erit *minimum* omnium aggregatorum $DI+IE$, quae duabus alijs quibuſcumque rectis DI, IE, ex iiſdem punctis in eandem rectam ad angulum DIE incidentibus haberi poſſunt.

THEOREMA II.

3. *Inter omnia triangula* BAC, DAE (Fig. 2.), *quae angulos verticales* BAC, DAE *aequales, & altitudinem* AF, *ex angulis verticalibus in baſim ſubjectam demiſſam, habent communem, triangulum iſoſceles* ABC minima *baſi*, minimo *crurum angulum verticalem efficientium aggregata, adeoque* minima *perimetra, & area* minima *afficitur*.

Dem. Quoniam cruribus aequalibus AB, AC interjacens latus $AD < AE$, facta $AF = AE$, junge BF. Triangula ABF, ACE, ob angulos BAF, CAE aequales, erunt aequalia, & ſimilia, adeoque $BF = CE$, Sed ang. $AEC < ACD$, ſeu $DFB < ABD$, & $ABD < ADC = BDF$; ergo potiori jure $DFB < BDF$, quare $BD < BF = CE$, poſitaque communi DC, fiet $BC < DE$; *quod erat primum*.

In AF = AE ſumpta $AH = AB$, junge BH. Ang. $AHB = HFB+FBH$; ſed ang. $AHB = ABH = ABD+DBH$, ergo $ABD+DBH = HFB+FBH$. Jam verò $ACB > AEC$, ſeu $ABD > HFB$; ergo ang. $DBH < FBH$, adeoque $DH < HF$. Secta igitur $AM = AC$, quum ſit $ME = FH$, erit $ME > DH$. Ab ME aufer $MN = DH$, erit $AB+AC = AD+AN$; ergo $AB+AC < AD+AE$; *quod erat ſecundum & tertium*. Quartum patet.

COROLLARIUM I.

4. Quò propius cruri AB eſt latus AD, triangulum DAE *minorem* habet baſim, *minorem* ſummam laterum angulum verticalem efficientium, *minorem* perimetrum, ac *minorem* aream prae reliquis, excepto iſoſcele BAC, ut liquet.

COROL.

COROLLARIUM II.

5. Si quilibet angulus FAG, fixo vertice A, ita in latus utrumque agitetur, ut crura AF, AG a ſubjecta PQ utrinque indefinite protracta portiones, veluti BC, DE, abſcindant; hujusmodi portionum *minima* tunc erit, cum latera AD, AE, vel cum anguli ADE, AED fient aequales. Caeterae verò portiones reciſae alijs *minores* erunt, cùm crura AD, AE, vel cùm anguli ADE, AED aequalitati magis appropinquabunt.

COROLLARIUM III.

6. Inter omnes rectas BC, DE (*Fig. 3.*), quae anguli acuti MAN cruribus AM, AN in infinitum protenſis utrinque terminatae, rectas AB, AC, AD, AE ſub aequalibus altitudinibus AI, AH ſecent; illa BC, quae triangulum iſoſceles ABC claudit, eſt *minima*, aggregatum AB+AC crurum dicti anguli MAN *minimum* reſcindit, & triangulum BAC *minimae* areae, *minimaeque* perimetri efficit, adeoque haberi facile poteſt recta illa, quae dempta BC, hujusmodi functiones *minimas* prae ceteris peragat. Et hic animadvertendum, quod ſi centro A, radio AI deſcribatur circulus FIK, rectarum BC, DE interſectio in rectae BC dimidio, pariterque rectae DE punctum D ultra punctum F, ubi circulus crus alterum AM ſecat, nunquam cadere poterit; quare portio BF èrit (ex parte cruris alterius AM) locus omnium rectarum ultra minimam BC terminatarum. Si vero angulus MAN non fuerit acutus, ſed rectus, vel obtuſus, tunc locus punctorum D foret ſemper minor quam BF; nam recta ex puncto F diſcedens ſecare nequiret crus AN, ſed eidem eſſet parallela in primo caſu, divergens in ſecundo, ut in fig. 4. videre eſt.

THEOREMA III.

7. *Inter omnia triangula, in quibus baſes & altitudines ſunt aequales, iſoſceles* maximum *habet angulum verticalem*, & minimam *perimetrum*.

Dem. Stantibus iisdem quae in Theor. antec. (3), poſita DL = BC (Fig. 2.), junctaque AL, erit triang. DAL = BAC, ang. autem DAL < BAC, & ita ſemper ubicumque tam punctum D, quam punctum L in recta PQ reperiantur; ſed triangulum iſoſceles BAC in hoc quoque caſu ***minima*** cingitur perimetro (1.), ergo &c.

COROLLARIUM I.

8. Inter omnia triangula, in quibus baſes, & altitudines ſunt aequales, illud, quod ad iſoſceliſmum magis vergit, ***maximum*** habet prae reliquis dempto iſoſcele angulum verticalem, ***minimamque*** perimetrum. Id per *Fig.* 1. conſtructionem facillime demonſtratur, ſi ibi AB, DE ponantur parallelae.

Quin etiam quoniam ſumpta CL = CI (*Fig.* 1.), junctiſque LD, LE, oſtendi nullo negotio poteſt, eſſe LE (ex parte convergentiae DE cum AB) minimam rectarum ID, IE, & contra LD maximam, in triangulis aequalibus HID, HLD baſi communi HD inſiſtentibus latera HI, ID minus ab iſoſceliſmo diſtabunt quam latera HL, LD, adeoque HI+ID < HL+LD, ſeu EI+ID < EL+LD, quapropter ex omnibus triangulis in eadem baſi DE conſtitutis, illud DEI, excepto DCE jam invento (1.), ***minimam*** prae ceteris habebit perimetrum, quod (ex parte divergentiae baſeos communis DE ab AB) vertice I ad punctum C vel aequaliter, vel propius accedet. Ubi apparet, quod ſi ducta recta quavis terminata HD ſecante AB poſitione datam in in C, ſumptiſque hinc inde a puncto C duobus punctis aequidiſtantibus I, L, jungantur HI, ID, HL, LD, poſſumus (cognita ratione majoris, vel minoris inaequalitatis, quam habet HC ad CD) determinare, quaenam ſumma ex duabus HI+ID, HL+LD, vel quiſnam ex duobus angulis HID, HLD ſit ***minor***.

COROLLARIUM II.

9. Inter univerſa triangula aequalia ***minimam*** aequilaterum habet perimetrum. Si negas; ſit aliud triangulum

BDC

BDC (*Fig.* 5.) hujusmodi proprietate praeditum, cujus duo ſaltem latera BD, DC ſint inaequalia. In eadem baſi BC conſtituatur triangulum iſoſceles ABC aequale eidem triangulo BDC; habebit ABC perimetrum minorem quam BDC, quare BDC non eſt illud, quod minimam habet perimetrum; & hoc ſemper, donec ad triangulum aequilaterum deveniatur.

THEOREMA IV.

10. *Inter omnia triangula* ABC, DBC (*Fig.* 5.). *quae baſes, ac perimetros aequales habent, iſoſceles* ABC maxima *area,* maximo *angulo verticali, & maxima gaudet altitudine.*

Dem. Quoniam perimetri ſunt aequales, vertex D eſt infra parallelam baſi BC (7.); ergo juncta AD parallela BE cadet infra baſim BC. Protrahe DC uſque ad BE, & junge AE, quae cruribus AB, AC interjacebit. Erit ang. BAE > BDE *num. cit.* adeoque potiori jure BAC > BDC; cetera patent.

COROLLARIUM I.

11. Inter omnia triangula, quae baſes, ac perimetros aequales habent, illud, quod ad iſoſceliſſimum magis appropinquat, *maxima* area, *maxima* angulo verticali, & *maxima* prae ceteris, excepto iſoſcele, fruitur altitudine. Id facile dignoſcitur revocato Coroll. 1. Theor. antec. (8.), & eodem hujus Theor. adhibito ratiocinio.

COROLLARIUM II.

12. Inter univerſa triangula iſoperimetra aequilaterum, eſt *maximum*. Demonſtratur ſimili fere modo, quo Theorema inverſum (9.), quamobrem inter omnia triangula iſoperimetra, iſoſceles illud poſt aequilaterum erit *majus*, quod ad aequilaterum propius accedet.

LEMMA.

13. *Triangula duos angulos invicem aequales habentia*

 ſunt

ſunt ut rectangula, ex lateribus angulos aequales efficientibus.

Dem. Triangulis ABC, ADE (*Fig.* 6. 7.) circa communem angulum A conſtitutis, junge CD. Erit triang. ABC.ADC = AB.AD, pariterque triang. ADC:ADE = AC:AE, quare multiplicando, fiet triang. ABC:ADE = AB.AC:AD.AE. Q. E. D.

THEOREMA V.

14. *Inter omnia triangula* ABC, FBC (Fig. 5.), *quae angulos verticales, & baſes aequales habent, iſoſceles* ABC maxima *perimetro*, maxima *area*, maximo *rectangulo* BAC, *&* maximo *praeditum eſt altitudine ab angulo verticali in latus ſubjectum demiſſa.*

Dem. Si triangula ABC, DBC aequalibus conſtarent ſub aequali baſe perimetris, trianguli iſoſcelis ABC angulus BAC foret major angulo BDC (10.); ergo ut angulus BFC angulum BAC adaequet, eſſe debet infra angulum BDC; quo poſito, cetera patent.

COROLLARIUM I.

15. Ergo inter omnia triangula ſcalena, in quibus anguli verticales, & baſes ſunt aequales, illud, quod ad iſoſceles propius accedit, per idem ratiocinium Coroll. I. Theor. antec. (11.) ſuperſtructum. *majori* prae ceteris perimetro, area *majori*, *majori* laterum rectangulo, & *majori* gaudebit altitudine ab angulo verticali in latus ſubjectum demiſſa.

COROLLARIUM II.

16. Quum inter omnia triangula rectangula in baſibus aequalibus conſtituta, iſoſceles maximum habeat crurum angulum rectum componentium aggregatum, apertum eſt, ex omnibus quadratis, quae bina aſſumpta, arearum ſummas aequales habent, quadrata duo invicem aequalia *maximo* perimetrorum aggregato ditari; adeoque bina illa quadrata, quorum latera ſunt ad aequalitatem

tatem propinquiora, cetera *majori* perimetrorum aggregato antecellere, ut ope ſemicirculi res ſit manifeſta.

M O N I T U M.

17. Quod de quadratis demonſtravimus, locum etiam obtinet in figuris quibuſcumque planis ejusdem generis quae ſint ſimiles, quae binae ſint aſſumptae, quaeque dictorum triangulorum crura circa angulum rectum pro lateribus homologis agnoſcant; quod pro ceteris caſibus, in quibus quadratorum quoad maxima & minima affectiones determinantur, ſemel indicaſſe brevitatis gratia ſufficiat; figurarum enim planarum ſimilium perimetri, ſunt in ſimplici, areae in duplicata laterum homologorum ratione. Figuras autem planas *ejusdem generis* illas appello, quae eodem cum laterum, tum angulorum numero conſtant.

T H E O R E M A VI.

18. *Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & areae ſunt aequales, iſoſceles* minimam *habet baſim*, maximam *altitudinem ab angulo verticali in latus ſubjectum demiſſam*, & minimam *perimetrum*.

Dem. Sit ABC (*Fig.* 8.) triangulum iſoſceles, cujus altitudo AI, baſis BC, & EDC ſcalenum, cujus altitudo DH, baſis EC; eorum anguli aequales BAC, EDC, & ſitus, ut in figura. Ob areas (*ex hyp.*) aequales, ſtabit AI.DH = EC:BC; ſed propter angulum EBC ex figurae constructione obtuſum, punctum E cadit infra punctum B, adeoque EC > BC; ergo AI > DH; *quod erat primum, & ſecundum*.

Triangulum iſoſceles ABC (*Fig.* 9.), & ſcalenum ADE ipſi aequale ita connectantur, ut anguli aequales in A coincidant; & baſes BC, DE ſe in aliquo puncto interſecent. Punctum iſtud interſectionis (accepto puncto D quod eſt infra B) eſſe nequit in dimidio F baſeos BC; nec ultra; ducta ſiquidem DH per F, ſi ex B agatur BK parallela crui AC, erit triang. HFC = BFK, propereaque tri-

ang. HFC < BFD, quod hypotheſi adverſatur. Punctum igitur interſectionis erit in L citra punctum F. Sed tunc damiſſis ex L ad crura AB, AC normalibus, conſtat, normalem ductam ad crus AC eſſe altera majorem; ergo EC < BD, adeoque poſitis AB+AE communibus, ob BC < DE, erit trianguli ABC perimeter minor perimetro trianguli ADE; *quod erat tertium*.

Corollarium I.

19. Inter omnia triangula ſcalena, in quibus anguli verticales, & areae ſunt aequales, illud, quod iſoſceli magis appropinquat, *minorem* prae ceteris habet perimetrum, *minorem* baſim, & *majorem* altitudinem ab angulo verticali in latus ſubjectum demiſſam; Si enim AC (*Fig.* 8.) minor ſit quam AB, & DC minor quam AC, erit ſemper BC < EC; cetera ſimilem allato requirunt ratiocinium.

Corollarium II.

20. Ex omnibus triangulis rectangulis aequalibus, iſoſceles *minimam* habet perimetrum, *minimam* baſim, & *maximam* altitudinem ex angulo recto in baſim demiſſam.

Corollarium III.

21. Ex omnibus rectis BC, DE (*Fig.* 9.) quae dati anguli A cruribus AM, AN indefinite protenſis utrinque terminatae triangula aequalia ABC, ADE abſcindunt illa BC, quae triangulum iſoſceles ABC claudit, eſt *minima*; ceteris vero *minor* in pari caſu eſt illa, quae duo crura AB, AC ad iſoſceliſmum propinquiora conjungit. Quapropter.

Corollarium IV.

22. Si per punctum datum F intra angulum quemlibet MAN plures rectae BC, DH tranſeant cruribus AM, AN utrinque terminatae; illa BC, quae in dato puncto F bifariam secabitur, erit *minima*, *minimum* cum ipſis cruribus reſectis efficiet triangulum ABC, *minimum* rectangulum

gulum BAC (13.) *minimam* eorundem crurum ſectorum ſummam AB+AC, adeoque triangulum ABC *minimae* perimetri claudet. Eſſe autem BC<DH ex eo quoque percipitur, quod quum angulus DBF major ſit angulo FHC, ducta BG, quae faciat ang. FBG=FHC, erit DG exceſſus, quo DH ſuperat BC. Quin etiam.

COROLLARIUM V.

23. Si recta BC ſecans duas rectas quaſcumque OM, EN convergentes, vel divergentes, faciet utrinque cum illis angulos aequales OBC, ECB, erit omnium DH ipſam bifariam in F ſecantium, & rectis iiſdem OM, EN hinc inde terminatarum, *minima*. Ex quo ſtatim colligitur, inter omnes rectas, quae per angulum F (*Fig.* 10. 11.) quadrati, aut rhombi AHFC tranſeunt, illa GB, quae cum lateribus AH, AC productis angulos AGB, ABG aequales facit, eſſe *minimam*; haec enim in puncto F biferiam ſecatur. Similiter ſi angulorum H, C (*Fig.* 12. 13.) quadrati, aut rhombi AHFC vertices duae rectae KL, MN ita traijciant, ut anguli LHF, NCF ſint aequales, recta GB, quae ab angulo F biſariam ſecatur erit *minima*, quippe quae angulos KGB, MBG cum rectis KL, MN aequales gignit. Idem accidit, ſi figura BHFCD ſit polygonum regulare, aut irregulare, dummodo ejus latera BH, DC protracta angulos LHF, NCF cum lateribus aequalibus HF, FC aequales efficiant.

THEOREMA VII.

24. *Inter omnia triangula* ABC, COE (Fig. 8.), *in quibus anguli verticales, & perimetri ſunt aequales, iſoſceles* ABC maximam *habet aream*, maximum *crurum* AB, AC *rectangulum*, minimam *baſim*, & maximam *altitudinem ab angulo verticali in baſim ſubjectam demiſſam*.

Dem. Stantibus quae in Theor. VI. (18.), ſi perimetri ſint aequales, trianguli iſoſcelis area evadet *maxima*, *quod erat primum*. & *ſecundum* (13.).

Si triangula, ABC, DBC eandem baſim BC, & aequales ſu-

les angulos verticales A, D babentia conſiderentur, iſoſceles ABC maxima cingeretur perimetro (14.); ut igitur perimetri, fiant aequales, oporter, ut triangulum DBC creſcat, evadatque ex. gr. DEC, quo iſoſceli ABC aptato, ut in figura, evidens eſt, ob angulum obtuſum EBC, baſim BC trianguli BAC fore ſemper *minorem* baſi EC trianguli iſoperimetri DEC; *quod erat tertium.*

Si in triangulis ABC, FEC anguli verticales, & altitudines forent aequales, trianguli iſoſcelis ABC perimeter foret minima (3).; ergo ut perimetri reddantur aequales, neceſſe eſt, ut triangulum ſcalenum EFC, ſalvo angulo verticali, deprimatur, fiatque ex. gr. BDC, adeoque ejus altitudo *minor* evadat; *quod erat quartum.*

Corollarium I.

25. Inter omnia triangula ſcalena, in quibus anguli verticales, & perimetri ſunt aequales; illud, cujus latera ad iſoſcelismum magis accedunt, *majorem* prae ceteris habet aream, *majus* crurum rectangulum, *minorem* baſim, & *majorem* altitudinem, ab angulo verticali in latus ſubjectum demiſſam. Hoc infertur per idem ratiocinium numeris 19. 15. 4. accommodatum.

Corollarium II.

26. Inter omnia triangula rectangula iſoperimetra, iſoſceles *maximam* haber aream, *minimam* baſim, & *maximam* altitudinem, ex angulo recto in hypothenuſam demiſſam.

Corollarium III.

27. Idcirco inter omnia triangula rectangula cum aequalia (20), tum iſoperimetra, iſoſceles aggregato ex laterum quadratis *minimo* afficitur. Et viciſſim inter omnia triangula rectangula, in quibus aggregata quadratorum ex lateribus aequantur, iſoſceles *maximam* habet cum aream, tum perimetrum.

Co-

Corollarium IV.

18. Ex omnibus rectis BC, DE (*Fig. 9.*), quae dati anguli A cruribus AM, AN indefinite excurrentibus utrinque terminatae triangula ABC, ADE iſoperimetra ſeparant, illa BC, quae triangulum iſoſceles ABC claudit, eſt *minima*; reliquis autem *minor* in pari caſu eſt illa, quae duo crura ad iſoſcelismum propinquiora connectit. Neque hic etiam eſt praetereundum, punctum L, ubi DE infra punctum B exiens, & BC ſe interſecant, neque in dimidio F ipſius BC, neque ultra, ſed citra tantum cadere poſſe. Etenim quoniam $DE > BC$, ut triangulorum ABC, ADE perimetri ſint aequales eſſe debet $BD < EC$; ducta igitur ad DE recta BI parallela cruri AC, quia $AE < AD$, erit $BI < BD$, adeoque $BL < LC$.

Theorema VIII.

19. *Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & crurum ipſos efficientium aggregata aequantur, iſoſceles,* minimam *habet baſim*, minimam *perimetrum*, maximam *aream*, maximum *ex ipſis cruribus rectangulum*, & maximam *altitudinem ex angulo verticali in baſim demiſſam*.

Dem. Cum in triangulis ABC, DBC (*Fig. 5.*) anguli BAC, BDC ſunt aequales, & baſis BC communis, triangulum iſoſceles ABC maxima praeditum eſt perimetro (14.); quare $BA + AC > BD + DC$; ut igitur iſta laterum aggregata fiant aequalia, opus eſt, ut crus alterum trianguli DBC creſcat. Creſcat igitur DC uſque in E, ut ſit $BA + AC = BD + DE$; liquet, fore baſim BC *minorem* baſi BE, adeoque triangulum ABC perimetrum habere *minorem* perimetro trianguli DBE, & ita ſemper, *quod erat primum, & ſecundum.*

Si anguli aequales BAC, BDE in unum coeant, ut in *Fig. 9*, & ponamus triangula ABC, DAE eſſe aequalia; erit $LC < DB$, per ea, quae nuper (18.) demonſtravimus ut

igitur

igitur triangula ABC, ADE evadant quoad duo latera circa angulum communem A iſoperimetra, augere oportet CF, adeoque triangulum ADE contrahere; *quod erat tertium, & quartum* (13.); *quintum* patet.

Corollarium I.

30. Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & crurum circa ipſos aggregata aequantur, illud, excepto iſoſcele, *minorem* habet baſim, *minorem* perimetrum, *majorem* aream, *majus* ex ipſis cruribus rectangulum, & *majorem* altitudinem ab angulo verticali in baſim ſubjectam demiſſam, quod ad iſoſceliſmum (ratione habita ad dicta duo crura) magis appropinquat. Patet per hujus Theor. ratiocinium ad num. 15. aptatum, & ex BC (*Fig*. 9.), quae ſeparet latera AB, AC ab aequalitate minus diſtantia quam AD, AE.

Corollarium II.

31. Ex omnibus rectis BC, DE (*Fig*. 9.), quae dati anguli A cruribus AM, AN indefinite productis utrinque terminatae reſecant triangula ABC, ADE ſummas AB † AC, AD†AE aequales habentia; illa BC, quae triangulum, iſoſceles ABC claudit, eſt *minima*, & idem triangulum ABC *minimae* perimetri, *maximae* areae, *maximi* ex dictis cruribus rectanguli, & *maximae* altitudinis ex angulo verticali in baſim demiſſae format. Haec autem omnia recta illa, excepta BC, prae ceteris efficit, quae triangulum ad iſoſceliſmum in dictis cruribus magis appropinquans ſecernit.

Corollarium III.

32. Si recta quaevis AB (*Fig*. 10. 11.) bifariam in C. et non bifariam in D ſecetur; omnium rectangulorum CH, DI (*Fig*. 10.) ex ſegmentis prodeuntium quadratum CH erit *maximum*; & omnium rhomboidum aequiangularum CH, DI (*Fig*. 11.) rhombus CH erit *maximus*. Seu, quod eòdem recidit, omnium rectangu-

lorum

lorum iſoperimetrorum quadratum eſt *maximum*, ac *minimam* habet diagonalem. Similiter omnium rhomboidum iſoperimetrarum, & aequiangularum rhombus eſt *maximus*, ac *minimam* habet diagonalem AF prae diagonalibus AE per angulos aequales traductis. Hujusmodi autem magnitudines *maximae*, aut *minimae ſecundariae* facile haberi poſſunt. Deſcripto enim circa diametrum AB (*Fig.* 10.) ſemicirculo ALB, erectiſque ad peripheriam normalibus CL, PM, DN, perſpicuum eſt, rectang. APB > ADB, quia $\overline{PM}^2 > \overline{DN}^2$, adeoque rectangulum illud, cujus latera ad aequalitatem magis accedunt, eſſe ceteris iſoperimetris, quadrato non computato *majus*; & ſic de rhomboidibus iſoperimetris, & aequiangulis, quae rectangulis iſoperimetris ſint proportionales, ſtatuendum.

Corollarium IV.

33. Quoniam $\overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{AF}^2$ (*Fig.* 10.) & $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$, erit $\overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 < \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$; ſeu $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$; nimirum quadratorum ex duobus ejusdem rectae ſegmentis genitorum *minima* ſunt illa, quae a ſegmentis aequalibus efficiuntur; quoad cetera verò, *minora* ſemper erunt illa duo, quorum latera ad aequalitatem magis accedent; ſane recta normali AF propinquior *minor* eſt longinquiori quavia AE.

Corollarium V.

34. Propterea 1°: Ex omnibus triangulis iſoperimetris ABC, DBC (*Fig.* 8.) in eadem baſi BC conſtitutis, iſoſceles ABC habet aggregatum $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *minimum* prae aggregato quovis alio $\overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$ quod multo magis fit verum,

rum, ſi triangula ſint aequalia (7.) 2:° Si recta BC (*Fig.* 9.) anguli dati MAN crura trajciens abſcindat portiones aequales AB, AC, & alia recta DH ejusdem anguli cruribus intercepta ipſam BC biſariam ſecet in F; quadrata laterum omnium in triangulo iſoſcele, nimirum $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ formabunt comparate ad quadrata $\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{DH}^2$ *minimum* aggregatum (22.) 3:° Quadrata laterum in rhombo *minima* ſemper erunt prae laterum quadratis in rhomboide qualibet iſoperimetra, hoc eſt $4\overline{AC}^2 < 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DE}^2$ (*Fig.* 11.); idem de quadrato comparate ad omnia rectangula iſoperimetra. 4:° Tandem, ijsdem retentis figuris, $4\overline{AC}^2 < 4AD.DE$ (13).

T H E O R E M A IX.

35. *Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & areae ſunt aequales, triangulum iſoſceles, habet crurum aequales angulos componentium aggregatum* minimum. Id ex demonſtratione Theor. VI. (18) ſie manifeſtum.

Corollarium I.

36. Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & areae ſunt aequales, triangulum ad iſoſceliſmum propinquius habet crurum circa aequales angulos aggregatum reliquis crurum aggregatis, excepto iſoſcele, ſingillatim *minus* (19).

Corollarium II.

37. Inter omnia rectangula aequalia, quadratum *minimam* habet perimetrum, ac *minimam* diagonalem; pariterque inter omnes rhomboides aequales, & aequiangulas, rhombus ipſis aequiangulus, & ſingillatim aequalis *mini-*

minimam habet perimetrum, & *minimam* diagonalem prae illis omnibus, quae per angulos aequales traducuntur. Demptis vero quadrato in primo caſu, & rhombo in ſecundo, rectangula, & rhomboides, in quibus latera ſunt aequalitati propinquiora, *minorem* prae ceteris perimetrum, ac *minorem* diagonalem comparate ad reliquas per angulos aequales tranſeuntes retinent.

Corollarium III.

38. Quadrata laterum in rhombo *minimam* aggregatum potiori jure ſemper efficient comparate ad aggregatum quadratorum ex lateribus in rhomboide qualibet ipſi aequali, videlicet $4\overline{AC}^2 < 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DE}^2$ (*Fig.* 11.); quod etiam in quadrato prae omnibus rectangulis aequalibus obtinet (33).

Theorema X.

39. *Univerſarum triangularum quoad duorum laterum ſummam iſoperimetrarum, iſoſceles, in qua duo iſta latera invicem aequalia angulum rectum efficiunt, eſt* maximum.

Dem. In triangulis ABC, ADC, AEC (*Fig.* 14.) ſint aequalia omnia latera CA, CD, CB, CE, ponaturque latus AC commune, ut in figura, & angulus ACB rectus. Demiſſis ex punctis D, E ad baſim AC normalibus DH, EL, ductaque per punctum B rectae AC parallela MN, perſpicuum eſt, fore productum AC. HD pariterque AC.LE minus unumquodque producto AC. CB, ec. adeoque triangulum rectangulum ACB *maximum*. Sed unumquodque triangulum iſoſceles eſt maximum prae omnibus triangulis, quae circa aequalem angulum habent laterum inaequalium aggregatum aequale aggregato crurum aequalium ejusdem trianguli iſoſcelis (29.); ergo &c.

Corollarium I.

40. Ex omnibus triangulis quoad duo latera inter ſe inaequalia iſoperimetris, illud, cujus crura angulum rectum

ctum ſormantia ad aequalitatem magis accedunt, erit, excepto iſoſcele rectangulo, reliquis *majus*. Si enim latus commune AC non ſit aequale ſingulis lateribus invicem aequalibus CD, CB, CE, ſemper perſiſtit triangulum rectangulum ACB *maximum*, quicunque ſint anguli non recti ADC, AEC, quia altitudo BC ſemper eſt major ſingulis altitudinibus DH, EL. Inter triangula verò rectangula, illud, cujus latera circa angulum rectum ab aequalitate minus diſcrepant, eſt, iſoſcele non computato, ceteris *majus* (30.).

Corollarium II.

41. Omnium rhomboidum iſoperimetrarum rectangulum iſoperimetrum eſt *maximum*.

Corollarium III.

42. Ex univerſis parallelogrammis iſoperimetris quadratum eſt *maximum*, & aggregatum ex laterum quadratis rhombo excepto, habet *minimum* (33).

Corollarium IV.

43. Ex omnibus triangulis, altitudinum, ac baſium aggregata aequalia habentibus, illud, in quo altitudo baſim adaequat, eſt *maximum*. Etenim ſi in triangulis iſoſcelijs ABE, FGK (*Fig.* 15. 16.) quorum altitudines AC FH, fuerit $AC + BE = FH + GK$; & $AC = BE$; Sumptis altitudinum dimidijs CD, HI, erit quoque $BC + CD = GH + HI$; ſed $BC = CD$; ergo junctis BD, GI, triang. BCD $>$ GHI, adeoque triang. ABE $>$ FGK. Idem valet de triangulis ſcalenis aBE, fGK ſub aequalibus baſibus BE, GK, aequalibusſque altitudinibus ac, fh.

Theorema XI.

44. *Inter omnia aggregata, quae haberi poſſunt, duo quaelibet triangulorum omnium aequalium latera accipiendo; illud, quod fit a duobus cruribus aequalibus trianguli rectanguli iſoſcelis, eſt* minimum.

Dem.

Dem. Sint duo triangula aequalia ABC, DEF (*Fig.* 17. 18.), ac triangulum ABC ſit iſoſceles, & rectangulum in A; dico eſſe $AB + AC < DE + EF$, ſeu $AB + AC < DE + DF$, ſeu $AB + AC < DF + FE$. Etenim finge triangulum iſoſceles HGI (*Fig.* 19.) in G rectangulum eſſe triangulo DEF quoad latera $GH + GI$, $DE + EF$ iſoperimetrum; illud erit hoc majus (39). Ut igitur triangulum GHI fiat aequale, & ſimile triangulo ABC, adeoque triangulo DEF aequale evadat, etiam ejus crura aequalia GH, GI imminuantur, oportet; ergo $AB + AC < DE + EF$. Eodem ordine ratiocinando, oſtendetur, $AB + AC < DE + DF$, & $AB + AC < DF + FE$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

45. Ex omnibus aggregatis, quae dari poſſunt, duo quaelibet triangulorum omnium aequalium, excluſo rectangulo iſoſcele, latera accipiendo; illud, quod fit a duobus cruribus, quae trianguli rectanguli angulum rectum conſtituunt, & ad aequalitatem magis accedunt, eſt reliquis *minus*. Sit enim ABC hujusmodi triangulum rectangulum aequale alio ſcaleno DEF, concipe triangulo ABC aliud triangulum rectangulum GHI Simile, habens crurum circa angulum rectum G aggregatum $GH + GI = DE + DF$; erit GHI majus triangulo DEF (40.), proſequere Theorematis demonſtrati ratiocinium, & Corollarium conſtabit.

COROLLARIUM II.

46. Ex omnibus rhomboidibus aequalibus rectangulum ipſis aequale *minimam* habet perimetrum.

COROLLARIUM III.

47. Ex univerſis parallelogrammis aequalibus quadratum *minimam* habet perimetrum adeoque potiori jure *minimum* ex laterum quadratis aggregatum (33).

COROLLARIUM IV.

48. Ex omnibus triangulis aequalibus, illud, cujus altitudo baſim adaequat, *minimum* habet ejusdem altitu-

dinis, ejuſdemque baſeos aggregatum. Nam ſi in triangulis iſoſcelijs aequalibus ABE, FGK (*Fig.* 15. 16), quorum altitudines AC, FH, triangulum ABE habeat AC = BE, ſumptis altitudinum dimidijs CD, HI, junctiſque BD, CI, triangulum rectangulum iſoſceles BCD aequale triangulo rectangulo GHI praebebit BC + CD < GH + HI, adeoque etiam AC + BE < FH + GK, quod etiam de triangulis ſcalenis aBE, fGK ſub eadem conditione ſit manifeſtum.

T H E O R E M A XII.

49. *Ex omnibus triangulis, quae in eadem baſi* CD (Fig. 20.) *conſtituta, vertices habent in recta poſitione data* AM, *cum ipſa* CD *ex parte puncti* D *convergente; triangulum* CFD, *cujus verticem* F *media proportionalis* FE *inter* CE, CD (*ex parte anguli* CEF *minoris ſuo complemento* CEM) *determinat*, maximo *afficitur angulo verticali* CFD.

Dem. Quum enim ſit $\overline{FE}^2 = CE \cdot ED$, erit FE tangens circuli per puncta C, D, F tranſeuntis, ut in figura, ſed quilibet angulus CHD eidem arcui COD inſiſtens, & circumferentiis terminatus, qui angulum CFD adaequat, major eſt angulo reſpondente CID, cujus vertex I ſit in portione, AE; ergo angulus CFD > CID. Praeterea ſi in EM ſumatur EL = EF, angulus CLD erit pariter maximus omnium angulorum CMD intra convergentes AM, CD exiſtentium, & verticibus rectam EM attingentium. Sed facile colligitur, angulum CFD majorem eſſe angulo CLD; portio enim CPD circuli majoris LDC, quae ſuſtinet angulum DLC, minor eſt portione COD circuli minoris FDC, quae ſuſtinet angulum CFD. Ergo angulorum omnium, de quibus eſt quaeſtio, angulus CFD eſt *maximus*. Q. E. D.

C o r o l l a r i u m I.

50. Si CD producta evadat rectae AM normalis, anguli CFD, CLD fient aequales, adeoque erit uterque ceterorum *maximus*.

Corol-

COROLLARIUM II.

51. Ex hoc igitur Theoremate, & ex Theor. III. (7.) dicimus, ex datis duobus punctis ab eadem parte extra rectam poſitione datam duas rectas ad eandem inclinare, quae *maximum* angulum efficiant.

COROLLARIUM III.

52. Productis CI, CF, CL, CM, patet, omnium angulorum DIQ, DLS, DMT angulum DFR eſſe *minimum*.

THEOREMA XIII.

53. *Si triangulorum quorumlibet* ABC, AEF (Fig. 21. 22.) *angulum* A *communem habentium baſes omnes* BC, EF *ſe in puncto aliquo* P *interſecent; dico, rectangulum* BPC, *quod a baſeos trianguli iſoſcelis* BAC *portionibus efficitur, eſſe omnium* EPF *minimum*.

Dem. Producto in *Fig.* 22. crure AB, angulus HBP, ſive BCF > BEP; quare CG efficiens angulum PCG = BEP ſecabit EF in aliquo puncto G. Jam vero propter triangula ſimilia BEP, PCG habemus BP. PE = PG. PC, adeoque BP. PC = EP. PG; ſed EP. PG < EP. PF; ergo BP. PC < EP. PF. Q. E. D.

COROLLARIUM

54. Si ex dato intra angulum A puncto P demittatur ad rectam AD angulum ipſum bifariam ſecantem normalis PD, quae anguli cruribus ſit utrinque terminata; rectangulum ſub ſegmentis BP, PC erit *minimum* omnium rectangulorum EPF ſub ſegmentis EP, PF quavis angulo applicatarum EF per idem datum punctum P tranſeuntium.

THEOREMA XIV.

55. *Ex omnium perpendicularium, a triangulorum cum aequalium, tum iſoperimetrorum angulis ad baſes ſubjectas demiſſarum, aggregatis, illud, quod fit in triangulo aequilatero, eſt* maximum.

Id ex dictis (9. 12.) ſponte fluit.

COROLLARIUM

56. Viciſſim inter omnia triangula, in quibus aggregata ex perpendicularibus ab angulis in baſes ſubjectas demiſſis ſunt aequalia, aequilaterum *minimam* habet cum aream, tum perimetrum,

THEOREMA XV.

57. *Trianguli rectanguli iſoſcelis* AFB (Fig. 23. 24.) *baſi* AB *bifariam in* C *diviſa, inter* AB, AC *media proportionalis* AE *inveniatur; deinde ex puncto* E *erecta uſque ad latus* FB *normali* ED, *junctaque* AD, *ipſi uſque ad baſim* AB *excitetur normalis* DG; *tum ſupra, vel infra* AD *ducta quavis* Ad, *eique excitata uſque ad baſim* AB *normali* dg, *nec non demiſſa normali* de; *omnium* Ae†eg *eſſe* AE†EG *minimum*.

Dem. Quoniam AF = AE, anguli AFD, AED recti, & AD ipſis ſubjecta communis, triangula AFD, AED erunt aequalia, & ſimilia, adeoque angulus FAB bifariam dividetur ab AD. Age DH ipſi AF parallelam, & junge Gd. Ob angulos ADH, DAH aequales, erit AH=HD, quare per tria puncta A, D, G tranſibit circulus, cujus centrum H, tangens BF. Angulus igitur rectus ADG major angulo AdG, ac proinde quum normalis dg punctum g ultra punctum G neceſſario cadat, erit AE†FG < Ae†eg. Q. E. D.

SCHOLION.

58. Quum ſit EB=ED, eB=ed, erit EG tertia proportionalis poſt AE, EB; & eg tertia proportionalis poſt Ae, eB.

THEOREMA XVI.

59. *Sit recta* AB (Fig. 25.) *bifariam ſecta in* C, *et non bifariam in* E, *ita ut habeatur* AB·AE = AE: AC; *ſitque praeterea angulus quilibet* DAB, *ductaque* BM *parallela rectae* DA, *per* E *agatur* MD *rectis* AD, BN *utrinque terminata; duo aggregatum triangulorum*

lorum ſimilium AED, BEM *eſſe omnium poſſibilium triangulorum ſimilium* AFD, BFN *ex alterius rectae* DN *cum* AB *inter ſectione* F *genitorum* minimum.

Dem. Inventa EG tertia proportionali poſt AE, EB, nec non FH tertia proportionali poſt AF, FB, junge BD. Triang. BEM:BED = ME:ED = BE:EA = EG:EB; itidemque triang. BED:BAD = EB:AB; ergo ex aequo BEM:BAD = EG:AB; ſed triang. AED:BAD = AE:AB, ergo duas habemus analogias.

$$BEM:BAD = EG:AB$$

$$AED:BAD = AE:AB$$

Eodem prorſus ordine duae aliae invenientur analogiae.

$$BFN:BAD = FH:AB$$

$$AFD:BAD = AF:AB$$

Quare permutando, & componendo, triang. BEM+AED:BFN+AFD = AE+EG:AF+FH. Sed AE+EG eſt minimum (57.); &c.

THEOREMA XVII.

60. *Sint* ABC, DCE (Fig. 26. 27.) *duo triangula ſimilia angulos aequales ſibi obvertentia. In eorum baſibus poſitis in directum conſtituantur alia duo triangula* BFC, CGE, *quae ſimul ſumpta triangulis* ABC, DCE *ſint iſoperimetra; dico in triangulis ſimilibus aggregatum altitudinum, hoc eſt* AH+DI, *eſſe* maximum.

Dem. Demiſſae normales AH, DI producantur, donec fiat HM = HF, HL = HA, junctiſque LC, MC, MG, agantur LQ, MR eidem HI parallelae uſque ad occurſum normalis GQ. Perſpicuum eſt, ob angulos aequales HCL, DCI, rectas LC, CD eſſe in directum, adeoque MC protractam in K excurrere intra triangulum CDE in *Fig.* 26. & extra in *Fig.* 27. MG verò ſecare HC (Fig. 26.), vel CI (Fig. 27.) in aliquo puncto N. Itaque MC+CG = LD > MG, & $\overline{LD}^2 > \overline{MG}^2$, ſeu $\overline{DQ}^2 + \overline{QL}^2 > \overline{GR}^2 + \overline{RM}^2$, quare ablatis aequalibus $\overline{QL}^2$, $\overline{RM}^2$, fiet $\overline{DQ}^2 > \overline{GR}^2$, & DQ > GR, ſeu AH + DI > FH+GI. Q. E. D.

 Corol-

COROLLARIUM I.

61. Si triangula BAC, CDE ſint ſimilia, & aequalia, erunt omnium rriangulorum BFC † CGE etiam non iſoſcelium *maxima*; quod ex dictis (10.) liquet, ſi pro Iſoſcele FBC aliud iſoperimetrum ſub aequali baſe BC, & altitudine FH ſubſtituatur, idemque fiat, ſi libeat, ratione habita ad aliud triangulum CGE.

COROLLARIUM II.

62. Viciſſim ſi duo triangula ſimilia, & alia duo quaecumque habeant ſub ijſdem baſibus aequale altitudinum aggregatum, triangula ſimilia *minima* cingentur perimetro.

THEOREMA XVIII.

63. *Omnium figurarum ejusdem generis iſoperimetrarum* maxima *eſt aequilatera, & aequiangula.*

Dem. Si negas, eſſe aequilareram; in poligono FBCDE (*Fig.* 28.) ſint duo ſaltem latera FB, FE inaequalia, Juncti BE, conſtruatur ſuper ipſam triangulum Iſoſceles ABE triangulo FBE iſoperimetrum. Erit ABE > FBE (10.), adeoque polygonum FBCDE non aequilaterum non eſt maximum; *quod erat primum*.

Quoniam ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis iſoperimetris non aequilateris *maxima* (*per dem.*) debet eſſe aequilatera; ſupereſt indagandum, quaenam ex hujusmodi figuris aequilareris ſit maxima. Sed ex omnibus figuris rectilineis aequilateria ejusdem generis illa, quae circulo inſcribi poreſt, eſt maxima (quod ſuo loco (192.), ne turbetur ordo, demonſtrabitur), & haec eſt aequiangula; ergo ex omnibus figuris, de quibus eſt quaeſtio, *maxima* debet etiam eſſe aequiangula; *quod erat ſecundum*.

COROLLARIUM

64. Viciſſim ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis aequalibus aequilatera *minimam* habet perimetrum, & ex omnibus recenſitis figuris aequalibus, &

aequila-

aequilateris, aequiangula *maximum* itidem habet perimetrum, quae univerſim figurarum quarumcumque rectilinearum ejusdem generis aequalium aequilatera ſimul & aequiangula *minima* perimetro circumdatur.

THEOREMA XIX.

65. *Si fuerint quotcumque triangula iſoſcelia aequalia, & ſimilia, & in eorum baſibus totidem conſtituantur triangula, quae ſimul ſumpta ſint omnibus iſoſcelis aequalibus & ſimilibus ſimul ſumptis aequalia, idque in infinitum; ajo, perimetrorum aggregatum in triangulis iſoſcelijs aequalibus, & ſimilibus eſſe* minimum.

Dem Si negas, faciant id primum triangula, quorum ſaltem unum non ſit iſoſceles. Super ejus baſi conſtrue triangulum iſoſceles ipſi aequale; hujus perimeter erit minor perimetro trianguli ſcaleni (1); ergo in triangulis aſſumptis perimetrorum aggregatum non eſt minimum, contra hypotheſim. Sint ſecundo triangula omnia iſoſcelia, quorum ſaltem duo ſint inaequalia. In horum baſibus conſiderentur conſtituta duo triangula tam ipſis aequalia, quam invicem aequalia, & ſimilia; iſta minorem quam inaequalia habebunt perimetrum (62.), quod hypotheſim deſtruit; & hoc ſemper, donec ad triangula omnia aequalia, & ſimilia deventum ſit. Q. E. D.

COROLLARIUM

66. Viciſſim ſi dentur quotcumque triangula iſoſcelia aequalia, & ſimilia, & in eorum baſibus totidem conſtituantur triangula, quae ſimul ſumpta ſint omnibus iſoſcelijs aequalibus, & ſimilibus quocumque modo iſoperimetra, triangulorum iſoſcelium aequalium & ſimilium aggregatum erit *maximum*.

THEOREMA XX.

67. *Si ex centro* C (Fig. 29.) *polygani regularis* ABDEF *ducantur ad omnes angulos rectae* CA, CB, CD, CE, CF, *idemque peragatur ſumpto quovis alio*

puncto H *vel intra polygonum, vel in ejus perimetro, vel extro; omnium rectorum ſic, eductorum aggregatum* minimum *erit illud, quod ex centro.*

Dem. Si enim punctum H ſumatur intra polygonum triangula ABC, BCD, DCE, ECF, FCA, quae ſunt aequalia, & ſimilia inter ſe, ſunt aequalia diſſimilibus AHB, BHD, DHE, EHF, FHA ſupra baſes eaſdem conſtitutis; & idem totum efficientibus; quare baſibus non computatis, duplum aggregati $CA+CB+CD+CE+CF$ erit minus duplo aggregati $HA+HB+HD+HE+HF$, (65.) adeoque primum aggregatum *minus* altero, *quod erat primum.*

Si punctum H ſumatur in perimetro (*Fig.* 30.,) aut extra (*Fig.* 31.); polygono ABDEF circumſcribe polygonum concentricum ejusdem generis KLMNO, & ex H, & centro communi C ad ejus angulos age HK, HL, HM, HN, HO, nec non CK, CL, CM, CN, CO Habebis $CK+CL+CM+CN+CO < HK+HL+HM+HN+HO < HA+AK, HB+BL, HD+DM, HE+EN, HF+FO$. Aufer communes AK, BL, DM, EN, FO, supereſt $CA+CB+CD+CE+CF < HA+HB+HD+HE+HF$; *quod erat ſecundum & tertium.*

Corollarium.

68. Ex pluribus punctis C,H (*Fig.* 32.) exeant quotcumque rectae (non minus vero quam tres) in totidem puncta diverſa I,K,L,M,N terminatae; ſed ex C prodeuntes angulos omnes, qui ſimul quatuor rectos efficiant, invicem aequales conſtituant; horum aggregatum erit *minimum*. Productis enim pro libito CI, CK, CL, CM, CN, deſcribe polygonum regulare ABDEF omnia puncta I, K, L, M, includens, tum age HA, HB, HD, HE, HF. Habebis $HI+IA, HK+KB, HL+LD, HM+ME, HN+NF > HA+HB+HD+HE+HF$, & potiori jure $> CA+CB+CD+CE+CF$; quare demptis portionibus communibus AI, BK, DL, EM, FN, reliquum $CI+CK+CL+CM+CN$ *minus* erit reliquo aggregato $HI+HK+HL+HM+HN$. Et Viciſſim ſi poſſibiles omnes triangulorum iſoperimetrorum collectiones ſupra, baſes, ſingulas ſingulis datis rectis aequales conſtitutae, verticibus in unum punctum conveniant, ita ut po-

ut polygona innumera forment; collectio illa, cujus anguli verticales quatuor rectos conſtantes ſunt invicem aequales, polygonum ceterorum *maximum* efficiet.

SCHOLION.

69. Si trium rectarum in unum punctum C (*Fig.* 33.) extremitatibus coeuntium aggregatum *minimum* velimus, oportet, ut ipſae angulos forment, quorum unusquiſque ſit gr. 120; adeoque hujusmodi rectae ab angulis A, B, D trianguli alicujus ABD exeuntes haberi nequeunt, niſi quilibet angulus minor ſit gr. 120. Ut autem inveniatur in tali caſu punctum C, deſcriptis ſuper duo latera BA, AD trianguli dati ABD duobus circuli ſegmentis ACB, ACD, quorum utrumque capit angulum gr. 120. communis interſectio C intra dictum triangulum erit punctum quaeſitum. Sed quoniam in triangulo ABD, cujus angulus BAD non ſit minor gr. 120. methodus iſta deficit, alia via eſt incedendum, quod praeſtabit ſequens.

THEOREMA XXI.

70. *In triangulo* CBD (*Fig.* 34. 35.) *cujus angulus* BCD *non ſit minor* gr. 120. *duo latera* CB, CD *angulum iſtum componentia minimum conſtituunt aggregatum prae omnibus aggregatis, quae a rectis in puncto* H *vel extra triangulum, vel in ejus perimetro, vel intra ſumpto ad angulos* B, C, D, *ſint eductae.*

Dem. Lateribus CB, CD (*Fig.* 34.) in infinitum productis, punctum H ſumatur prius extra angulum MCN, vel in ejusdem cruribus, excepto puncto C. Si extra; junctis de more HB, HC, HD, patet, ob $HB+HC > BC$, & $HD > CD$, fore $BC+CD < HB+HC+HD$; idem evidens eſt, ſi punctum H ſtatuatur in alterutro crure CM, CN. Supereſt igitur, ut idem, demonſtremus, poſito puncto H intra angulum MCN. Pro quo demiſſis ex H in latera CB, CD (Fig. 35.) normalibus HI, HL, junctaque IL diviſa bifariam in P, circa diametrum CH deſcribe circulum, qui tranſibit per puncta I, L; praeterea ducta per P diametro QR, junge QI, QL, HI, HD.

Duo

Duo adſunt triangula IQL, ICL, iſoſceles primum, ſcalenum alterum, quorum baſis IL communis, & anguli ad verticem IQL, ICL aequales, adeoque ex dictis (14.) $IQ\ QL > IC + CL$. Quoniam, vero IQR eſt ſaltem angulus gr. 60, erit arcus IR tertia pars circuli, ac proinde IQ (latus hexagoni regularis ipſi circulo inſcripti) radium adaequabit, ex quo $QI + QL = QR$, & $IC + CL < QR$. Si angulus IQL major ſit angulo gr. 120, liquet, latera QI, QL fieri breviora; quare tunc $QI + QL$, multoque magis $IC + CL < QR = CH$. Hiſce rite perceptis, propter $BI < BH$, $DL < DH$, fiet $BC + CD < HB + HC + HD$. Sed hoc ſemper accidit ubicumque intra angulum, MCN ſtatuatur punctum H; ergo &c.

C o r o l l a r i u m

71. Si trianguli ABD (*Fig.* 36.) angulus aliquis minor ſit gr. 120, ac libeat ad ejus laterum dimidia C, E, F ducere ex aliquo puncto tres rectas, ita ut eorum aggregatum ſit *minimum*, junganter CE, CF, EF; exurget triaugulum, CEF ſimile triangulo ABD, eſt enim BEFC parallelogrammum, cujus diagonalis EC, adeoque invento (69.) puncto H, ex quo ductarum HC, HF, HF aggregatum ſit minimum, hoc erit etiam *minimum* quaeſitum. At ſi quis ex angulis dicti trianguli ABD, puta A, non ſit minor gr. 120, & punctum optemus, ex quo ductae ad puncta C, E, F rectae *minimum* faciant aggregatum, punctum hoc erit in dimidio rectae BD angulo A ſubtenſae; actis enim, ut ſupra, CE, CF, EF, quum ſit ang. $ECF = BAD$, erit $CE + CF$ *minimum* prae quolibet alio aggregato $HC + HE + HF$.

T H E O R E M A XXII.

72. *Ex omnibus quadratis, quae bina, terna, quaterna, quina, & ita porra in infinitum aſſumantur, & in quibus ſic aſſumptis arearum aggregata fiat conjunctim aequalia, duo, vel tres, vel quatuor, vel quinque &c. quadrata ſingula invicem aequalia* maxima *prae totidem non omnibus invicem aequalibus perimetro pollent.*

Dem.

Google

Dem. Quod attinet ad quadrata, quae bina ſint accepta, id jam fuit demonſtratum (16.). Quamobrem ſint quatuor quadrata A^2, B^2, C^2, D^2. Sumantur bina pro libito, fiatque $F^2 + F^2 = A^2 + C^2$; $G^2 + G^2 = B^2 + D^2$. Quatuor quadrata F^2, G^2, F^2, G^2 majorem ſimul habebunt perimetrum quam data A^2, B^2, C^2, D^2, quibus aequantur. Fiat praeterea $H^2 + H^2 = F^2 + G^2$; $H^2 + H^2 = F^2 + G^2$; quatuor emergent quadrata H^2 invicem aequalia, quae majorem habebunt perimetrum quam quadrata F^2, G^2, F^2, G^2, quibus aequantur, ac proinde majorem quam data A^2, B^2, C^2, D^2, quibus pariter aequantur.

Idem ratiocinium valet pro quadratis, quae octona fuerint accepta, adeoque demonſtratio ad quadratorum claſſes progreſſionem geometricam 2, 4, 8, 16, 32, &c. ſervantes generatim extenditur. Iſta autem progreſſio reliquis caſibus demonſtrandis inſervit.

Sint enim tria quadrata A^2, B^2, C^2. Concipe tria quadrata, cum invicem, tum ipſis aequalia, nempe H^2, H^2, H^2. Adde utrinque quadratum H^2. Fiet $A^2 + B^2 + C^2 + H^2 = 4H^2$. Sed hoc aggregatum majorem illo (*per dem.*) habet perimetrum; ergo ablato hinc inde quadrato H^2, etiam $3H^2$ majorem habebit perimetrum quam A^2, B^2, C^2. Quadrata A^2, B^2, C^2 commutari ponantur, ſalva aggregati aequalitate, in omnes formas poſſibiles; idem ſemper pari methodo demonſtrabitur. Quocirca aliam obtinuimus geometricam progreſſionem 3, 6, 12, 24, 48;

24, 48, &c. in cujus omnibus terminis Theorema verum reperitur. Dentur ſiquidem ſex quadrata $P^2, Q^2, R^2, S^2, T^2, V^2$ ſumptiſque ternis ad libitum, ex. gr. $P^2, R^2, S^2; Q^2, T^2, V^2$; ſtatuatur $3F^2 = P^2 + R^2 + S^2$; $3G^2 = Q^2 + T^2 + V^2$; † tum captis $H^2 + H^2 = F^2 + G^2$, prodibit $6H^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 + T^2 + V^2$; ſex autem quadrata aequalia H^2 majori quam ſex data inaequalia, quae adaequant, perimetro cingentur.

Si fuerint quinque quadrata A^2, B^2, C^2, D^2, E^2, imaginentur quinque H^2 ipſis aequalia, ac deinde tria utroque aggregato addantur quadrata aequalia H^2, quia numerus 8 primam ſeriem ingreditur; erit $8H^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + 3H^2$, adeoque $8H^2$ majorem habebit perimetrum. Deme utrinque $3H^2$; remanebit ut prius $5H^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$, verùm $5H^2$ majori afficietur perimetro, & idcirco aliam habemus progreſſionem geometricam 5, 10, 20, 40, 80, &c. & ſic in infinitum. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

73. Quoniam quae de quadratis demonſtravimus, ad figuras quaſcumque planas ſimiles ejuſdem generis, ut monuimus (17.), extenditur; de omnibus quoque rhombis ſimilibus idem eſt ſentiendum. Sed rhombus majorem habet perimetrum quam quadratum ipſi aequale (47.); ergo ex omnibus quadratis, rhombiſque ſimilibus, binis, vel ternis, vel quaternis, vel quinis, & ita porro etiam promiſcue acceptis, & in quibus

ſic

ſic acceptia arearum aggregata ſint aequalia, duo, vel tres, vel quatuor, vel quinque &c. rhombi dictis ſimiles, & ſinguli invicem aequales *maxima* perimetro afficientur.

Corollarium II.

74. Inter omnes figuras rectilineas ejusdem generis, in quibus aggregata quadratorum ex lateribus ſunt aequalia, regularis *maximam* habet perimetrum.

Theorema XXIII.

75. *Sit numerus quilibet quadratorum invicem aequalium; ſint totidem quadrata, non omnia invicem aequalia, ſed ſimul ſumpta dictis invicem aequalibus iſoperimetra: dico, quadratorum invicem aequalium aggregatum eſſe prae omnibus inaequalium aggregatis* minimum.

Dem. ſi negas; faciant id quotcumque quadrata, quorum ſaltem duo ſint inaequalia, puta quinque, nimirum $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$. Quadratis duobus inaequalibus A^2, C^2 concipe iſoperimetra duo quadrata invicem aequalia $H^2 + H^2$; iſta quadratis $A^2 + C^2$ erunt minora (33.); quare quadrata $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$ non component aggregatum minimum, contra id quod poſitum fuerat; & ita ſemper, qualiſcumque ſit quadratorum numerus, donec ad quadrata omnia invicem aequalia deventum, ſit; ergo &c.

Corollarium I.

76 Quum pro quadratis rhombi ſimiles ſubſtitui poſſint (17.) & rhombus quadrato iſoperimetro ſit minor (42.), quilibet rhomborum ſimilium & aequalium numerus *minimum* arearum aggregatum prae eotidem quadratis, vel rhombis ſimilibus conjunctim iſoperimetris, etiam promiſcue ſumptis, conſtituet.

Corol.

COROLLARIUM II.

77. Si recta in quotcumque partes aequales, & in totidem inaequales quomodocumque ſecetur, aggregatum quadratorum portionibus aequalibus inſiſtentium erit *minimum* aggregatorum omnium ex quadratis in portionibus inaequalibus conſtitutis. Aggregatum autem rhomborum ſimilium in portionibus invicem aequalibus conſtitutorum erit *minimum* aggregatorum minimum, quae ex quadratis, vel ex rhombis ſimilibus, vel ex utriſque commixtis, & in ejusdem rectae portionibus inaequalibus innixis, emergunt.

COROLLARIUM III.

78. Inter omnes figuras rectilineas ejusdem generis cum iſoperimetras, tum aequales, regularis *minimum* habet aggregatum quadratorum, quae a lateribus fiunt. Si enim ſunt aequales, minimum regularis habet perimetrum (64); ſed cum perimetri ſunt aequales, quadrata ex lateribus aequalibus minimum faciunt aggregatum (75.); ergo hujusmodi latera aequalia id multo magis efficiunt, ſi aequaliter ſingula imminuantur.

THEOREMA XXIV.

79. *In recta* AB, (Fig. 37.) *ita diviſa in* C, *ut ſit* $CB = \frac{1}{m} AB$ (*per* m *numerum quamvis integrum affirmatorum, unitate excluſa, deſigno*) *ſumpto quocumque alio puncto* D, *ajo, fore* $\overline{AC}^2 + (m\cdot 1)\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + (m\cdot 1)\overline{DB}^2$.

Dem. Si $m = 3$, erit $CB = \frac{1}{3} AB$. Itaque in PQ (*Fig.* 38.) = AB ſumpta RQ = DB, ſecentur AC, PR bifariam in E, S. Habemus $\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 + \overline{CB}^2 < \overline{PS}^2 + \overline{SR}^2 + \overline{RQ}^2$ (77.), adeoque $2\overline{AE}^2 + 2\overline{EC}^2 + 2\overline{CB}^2 < 2\overline{PS}^2 + 2\overline{SR}^2$

$\overline{SR}^2 + 3\overline{RQ}^2$, ſeu $\overline{AC}^2 + 2\overline{CB}^2 < \overline{PR}^2 + 2\overline{RQ}^2$, nimirum $\overline{AC}^2 + 2\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 2\overline{DB}^2$. Si $m = 4$, erit $CB = \frac{1}{4} AB$ (*Fig.* 39. 40.) quare in PQ, = AB ſumpta RQ = DB, dividantur AC, PR in tres partes aequales AF, FE, EC, nec non PT, TS, SR. Erit $3\overline{AF}^2 + 3\overline{FE}^2 + 3\overline{EC}^2 + 3\overline{CB}^2 < 3\overline{PT}^2 + 3\overline{TS}^2 + 3\overline{SR}^2 + 3\overline{RQ}^2$ (77.), ſive $\overline{AC}^2 + 3\overline{CB}^2 < \overline{PR}^2 + 3\overline{RQ}^2$ videlicet $\overline{AC}^2 + 3\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 3\overline{DB}^2$. Si $m = 5$, invenietur $\overline{AC}^2 + 4\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 4\overline{DB}^2$.

Eodem igitur ordine procedendo, eò tandem devenietur, ut ex certa numerorum progreſſione ſtatui tandem poſſit, eſſe generatim $\overline{AC}^2 + (m-1)\overline{CB}^2 < AD + (m-1)\overline{DB}^2$, poſita $CB = \frac{1}{m} AB$. Q. E. D.

C o r o l l a r i u m.

80. Si magnitudinis $\overline{AC}^2 + 2\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 2\overline{DB}^2$ dimidium accipiatur, fiet $\frac{1}{2} AC + \overline{CB}^2 < \frac{1}{2} \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$, exiſtente ut prius $CB = \frac{1}{3} AB$. Similiter ſi magnitudinis $\overline{AC}^2 + 3\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 3\overline{DB}^2$ triens ſumatur, prodibit $\frac{2}{3}\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \frac{1}{3}\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$, manente ut ſupra $CB = \frac{1}{4} AB$. Ergo generatim $\frac{1}{m-1}\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \frac{1}{m-1}\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$, ſtante ſemper $CB = \frac{1}{m} AB$. Ubi enim adverte quod ſi tam quadrata, quam rhombi ſimiles ſub ejusdem AB portionibus AC, CB, AD, DB promiſcuè conſiderentur; rhombus ſub portione AC una cum rhom-

bis

bis ſimilibus ſub reliqua CB, quorum numerus ſit $m-1$; vel rhombus ſub portione CB unà cum rhombis ſimilibus ſub reliqua AC, quorum numerus ſit $\frac{1}{m-1}$ aggregatum *minimum* efficient, retenta ſemper $CB = \frac{1}{m} AB$.

Scholion.

81. Alio quoque modo praeſens Theorema oſtendi poteſt.

Demonſtrationem in ſtudioſae Juventutis gratiam hic adnectere non gravabor; ſed lemma eſt praemittendum, videlicet.

In recta AD (*Fig.* 150 151.) ita diviſa in C, ut fiat $mDC = AD$, ſumatur quodvis aliud punctum E, ponaturque $BE.ED = CD.AF$; dico, fore $\overline{AE}^2 + (m-1)\overline{ED}^2 = ADF$. Sit enim E inter puncta B, D (*Fig.* 150.), ſeceturque $CB = CD$. Quoniam $BD = 2CD$, erit $mBD = 2mCD = 2AD$ (*per hyp*); quare $mBE = mBD - mDE = 2AD - mDE = 2AE + 2DE - mDE = 2AE + (2-m)DE$; ergo $2AE.DE + (2-m)\overline{DE}^2 = mBE.DE = mCD.AF = DAF$. ſed $ADF = \overline{AD}^2 - DAF = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + 2AED - DAF$; ergo $ADF = \overline{AE}^2 + (m-1)\overline{DE}^2 + (2-m)\overline{DE}^2 - (2-m)\overline{DE}^2 + 2AED - 2AED = \overline{AE}^2 + (m-1)\overline{DE}^2$; *quod erat primum.*

Puncto E inter puncta A, B (*Fig.* 151.) conſtituto, habemus $BE = DE - BD$; $mBE = mDE - mBD = mDE - 2AD = mDE - 2AE - 2DE = (m-2)DE - 2AE$. Quare $mBE.ED = (m-2)\overline{DE}^2 - 2AE.ED = mCD.AF = DAF$, ergo $ADF = \overline{AD}^2 + DAF = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + 2AED + DAF = \overline{AE}^2 + (m-1)\overline{DE}^2 + 2AED - 2AED + (m-2)\overline{DE}^2 + (2-m)\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + (m-1)\overline{DE}^2$; *quod erat ſecundum.* Hiſce

Hiſce praejactis, ajo, $\overline{AC}^2 + (m-1)\,\overline{CD}^2 < \overline{AE}^2 + (m-1)\,\overline{ED}^2$. Etenim ſumpta AC = CD, erit $\overline{AE}^2 + (m-1)\,\overline{ED}^2 = ADF$; $\overline{AC}^2 + (m-1)\,\overline{GD}^2 = ADG$; ſed ADG $<$ ADF (quod in *Fig.* 151. perſpicuum eſt, in *Fig.* vero 150. ob CD. AF = BE. ED, & BE. ED $<$ BC. CD, eſt etiam CD. AF $<$ CD. BC, ſeu CD. AF $<$ CD. AG, adeoque AF $<$ AG); ergo &c.

T H E O R E M A XXV.

82. *Si ex duobus punctis* DE (Fig. 1.) *extra rectam* AB *poſitione datam ab eadem parte agantur ad ipſam* AB *quotlibet rectae* EC, DC, EI, DI *facientes angulos* DCE, DIE, *quorum vertices* G, I *ſint in eadem* AB; *tum ex punctis* D, E *demittantur ſupra* AB *normales* DG, EF; *ſi punctum* C *in dimidio interceptae* GF *conſiſtat, dico, aggregatum quadratorum rectis* EC, CD, *videlicet* $\overline{EC}^2 + \overline{GD}^2$ *eſſe minimum*.

Dem. Triangula rectangula GFE, GGD exhibet $\overline{GE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FE}^2$, $\overline{CD}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{CD}^2$; ob eandem rationem habemus $\overline{IE}^2 = \overline{IF}^2 + \overline{FE}^2$, $\overline{ID}^2 = \overline{IG}^2 + \overline{GD}^2$. Sed $\overline{CF}^2 + \overline{CG}^2 < \overline{IF}^2 + \overline{IG}^2$ (33.); ergo $\overline{CF}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{GD}^2 < \overline{IF}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{IG}^2 + \overline{GD}^2$, ſeu $\overline{EC}^2 + \overline{CD}^2 < \overline{EI}^2 + \overline{ID}^2$. Q. E. D.

T H E O R E M A XXVI.

83. *Datis triangulo aequilatero* ABC (Fig. 41. 42. 43.), *& alio quovis iſoſcele* DEF *ipſi vel iſoperimetro, vel aequali, ſi ex angulis* B, E *baſi utrique* BG, EF *adjacentibus dimittantur ad crura oppoſita* AC,

DF *normales* BH, EL; *dico*, *aggregatum* $\overline{CH}^2 + 2\,\overline{AH}^2 + 3\,\overline{BH}^2$ *eſſe* minus *quovis aggregato* $\overline{FL}^2 + 2\,\overline{DL}^2 + 3\,\overline{EL}^2$.

Dem. Etenim propter normalem EL, habemus $2\,\overline{DE}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = 2\,\overline{DL}^2 + 2\,\overline{EL}^2$, pariterque $\overline{EF}^2 = \overline{FL}^2 + \overline{EL}^2$, quare $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{FL}^2 + 2\,\overline{DL}^2 + 3\,\overline{EL}^2$. Eodem modo demonſtrabitur $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + 2\,\overline{AH}^2 + 3\,\overline{BH}^2$. Sed tria quadrata invicem aequalia $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$, $\overline{BC}^2$, utpote tribus quadratis $\overline{DE}^2$, $\overline{DF}^2$, $\overline{EF}^2$ iſoperimetra, ſunt ipſis ſemper minora, quod multo magis contingit cùm triangula ſunt aequalia (78.); Ergo in utroque caſu aggregatum $\overline{CH}^2 + 2\,\overline{AH}^2 + 3\,\overline{BH}^2$ erit ſemper *minus* aggregato $\overline{FL}^2 + 2\,\overline{DL}^2 + 3\,\overline{FL}^2$ Q. E. D,

C o r o l l a r i u m

84. Viciſſim ſi in triangulis iſoſcelijs expoſitis fuerit $\overline{CH}^2 + 2\,\overline{AH}^2 + 3\,\overline{BH}^2 = \overline{FL}^2 + 2\,\overline{DL}^2 + 3\,\overline{EL}^2$; aequilaterum ABC *maximam* habebit cum aream, tum perimetrum.

L E M M A.

85. *Si in quocumque triangulo* ABD (Fig. 44.) *e laterum dimidijs* E, F, H, *agantur ad ſubjectos angulos rectae* ED, FA, HB, *dico*, *iſtas mutuo interſecari in eodem puncto* C, *ita ut* CE, CF, CH *ſint ſingulae reſpondentium* DE, AF, BH *ſubtriplae*.

Dem. Juncta EH, finge duas tantum ED, HB ductas eſſe. Quum EH biſariam ſecet (*ex hyp.*) latera

tera AB, AD, erit lateri BD parallela, nec non (ob AB duplam AE) ejusdem BD pars dimidia. Sed propter triangula ſimilia BCD, ECH, ſtat DC : CE = BD : EH; ergo DC eſt dupla CE, adeoque CE = $\frac{1}{3}$ DE. Pari modo demonſtrabitur HC = $\frac{1}{3}$ HB. Concipe nunc, duas tantum ductas eſſe FA, HB, & junge FH. Ob FH ipſi AB parallelam, oſtendetur eodem ratiocinio FC = $\frac{1}{3}$ AF, & HC = $\frac{1}{3}$ BH; quare tres AF, DF, BH, quarum portiones CF, CE, CH ſunt earum reſpective pars tertia, per idem punctum C neceſſario tranſibunt. Q. E. D.

T H E O R E M A XXVII.

86. *Si in quocumque triangulo* ABD (Fig. 45.) *recta* AF (*quae, ducta ex vertice* A *baſim* BD *bifariam dividit*) *ſecetur in* C, *ita ut* CF *ſit totius* AF *pars tertia, & ex* C *agantur* CB, CD; *dico, aggregatum* $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$ *eſſe minimum.*

Dem. Demittatur ex C in baſim BD normalis CH, ſitque AFB angulus obtuſus; habetur

$$\overline{CB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 + 2\,BF.\,FH$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 - 2\,BF.\,FH;\ \text{quare}$$

$$\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = 2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{CF}^2;\ \text{adeoque}$$

$$\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{BF}^2 + 2\,\overline{CF}^2.$$

Pari modo demonſtrabitur $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AK}^2 + 2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{KF}^2$. Itaque quum ſit $\overline{AC}^2 + 2\,\overline{CF}^2 < \overline{AK}^2 + 2\,\overline{KF}^2$ (79), erit quoque $\overline{AC}^2 + 2\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{BF}^2 < \overline{AK}^2 + 2\,\overline{KF}^2 + 2\,\overline{BF}^2$.

Praeterea ſi ſumpto puncto K (*Fig.* 46.) extra rectam AF, agantur KA, KB, KD, KF, demittaturque normalis KL ſupra BD; demonſtrabitur $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AK}^2 + 2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{FK}^2$; adeoque $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$. $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AC}^2 + 2\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{BF}^2\ \overline{AK}^2 + 2\,\overline{KF}^2 + 2\,\overline{BF}^2$. Sed $\overline{AC}^2 + 2\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{BF}^2 < \overline{AK}^2 + 2\,\overline{KF}^2 + 2\,\overline{BF}^2$ (ubicumque enim in recta $= AK + KF$ accipiatur punctum K, ſit ſemper $\overline{AC}^2 + 2\,\overline{CF}^2 < \overline{AK}^2 + 2\,\overline{KF}^2$ ob $AF < AK + KF$, idque ſi *K* ſit etiam in trianguli perimetro, vel extra); ergo &c.

C o r o l l a r i u m I.

87. Juncta EF (*Fig.* 44.), poſtquam ad trianguli cujuslibet ABD laterum dimidia E, F, H ductae ſint ab angulis oppoſitis rectae AF, BH, DE, patet, ipſam utpote rectae AD parallelam, eſſe bifariam diviſam in I ab HB, quod eadem de cauſa etiam rectae FH contingit in L; quocirca trianguli EFH latera ſunt bifariam ſecta in punctis I, G, L; ergo in triangulo ABD ſi in recta AF ex angulo quovis A ad lateris oppoſiti BD dimidium F ducta, ſumatur punctum C, quod abſcindat $CF = \frac{1}{3}$ AF, & ex iſto ad dimidia reliquorum laterum ipſius trianguli agantur CE, CH; aggregatum $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ erit *minimum*, ac proiude

C o r o l l a r i u m II.

88. Stantibus iiſdem, ductiſque ex punctis C, K (*Fig.* 47.) ad angulos A, B, D, & ad laterum dimidia E, F, H rectis CA, CB, CD, CE, CF, CH, nec non KA, KB, KD, KE, KF, KH, erit aggregatum $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 +$

CD

$\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ *minimum* prae quovis alio aggregato $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 + \overline{KE}^2 + \overline{KF}^2 + \overline{KH}^2$.

T H E O R E M A XXVIII.

89. *In quolibet triangulo* ABD (*Fig.* 48), *ducta ex angulo quovis* A *ad ſubtenſam* BD *recta* AF, *quae ipſam bifariam ſecet in* F, *tum ſumptis hinc inde a puncto* F *punctis* M, N, *ut ſit* MF = FN, *accipiatur in* AF *punctum* C, *quod reſecet* CF = $\frac{1}{5}$ AF, *junganturque* CB, CD, CM, CN; *ajo, aggregatum*, $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2$ *eſſe* minimum *aggregatorum omnium ex quadratis rectarum ab alio puncto ubicumque ſumpto eductarum, & in iiſdem punctis* A, B, M, N, D *terminatarum*.

Dem: Sumpto in AF quovis alio puncto *K*, age *K*B, *K*M, KN, KD, & ex C demitte in BD normalem CH. Poſito angulo CFM obtuſo, fiet

$$\overline{CM}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{CF}^2 + 2\,MF.\,FH$$

$$\overline{CN}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{CF}^2 - 2\,MF.\,FH$$

$$\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = 2\,\overline{MF}^2 + 2\,\overline{CF}^2$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{AC}^2 + 2\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{MF}^2$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + 4\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{MF}^2.$$

Similiter demiſſa ſupra BD ex *K* normali *KL*, oſtenderur $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AK}^2 + 4\,\overline{KF}^2 + 2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{MF}^2$; quapropter quum ſit $\overline{AC}^2 + 4\,\overline{CF}^2 < \overline{AK}^2 + 4\,\overline{KF}^2$ (79), erit etiam $\overline{AC}^2 + 4\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{MF}^2 < \overline{AK}^2 + 4\,\overline{KF}^2 +$

$2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{MF}^2$. Sed ubicumque vel intra, vel extra triangulum, vel in ejus perimetro punctum K accipiatur, idem ſemper, ut paulo ante vidimus (86.), oſtendi poteſt; ergo &c.

Corollarium I.

90. Si praeter puncta M, N, alia P, Q a puncto F aequidiſtantia ſumantur, & ſic in infinitum per progreſſionem 2, 4, 6, 8, 10, &c. *minimum* ſemper erit aggregatum illud quadratorum in progreſſione 3, 5, 7, 9, &c. creſcentium, quae a rectis a puncto C exeuntibus, & in ejuſmodi punctis terminatis efficiuntur, prae totidem quadratis ex rectis a quovis alio puncto ad eoſdem terminos eductis; dummodo tamen punctum C ita ſeligatur, ut CF ad AF rationem habeat, quam unitas ad dictum quadratorum numerum.

Corollarium II.

91. Si AF ſit minima rectarum BS, DR ex reliquis trianguli ABD angulis B, D ad dimidia S, R laterum oppoſitorum AD, AB eductarum, erit $\overline{AC}^2 + n\,\overline{CF}^2$ *minimum* minimorum, $\overline{BV}^2 + n\,\overline{VS}^2$, $\overline{DT}^2 + n\,\overline{TR}^2$.

Corollarium III.

92. Demiſſa ex aliquo angulo A (*Fig*. 49. 50.) trianguli cujuſcumque ABD ad baſim ſubjectam BD normali AF, in qua ſumpto quovis puncto K, eductae ſint ad reliquos angulos rectae KB, KD, et ad alia quotlibet baſeos BD puncta quomodocumque ſumpta *M*, N, P aliae rectae KM, KN, KP; ſi in eadem AF accipiatur punctum C tale, ut FC habeat ad FA rationem, quam unitas ad numerum rectarum *KA*, KB, *KP*, *KM*, KN, *KD*, atque ex eodem puncto C agantur CB, CP, CM, CN, CD, aggregatum

CA

$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 + \overline{CD}^2$ prae aggregato quolibet $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KP}^2 + \overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{KD}^2$ erit *minimum*, idque quicumque ſit quadratorum numerus, quod ex proxime ſuperioribus ſponte conſequitur.

L E M M A.

93. *Sumpto ubicumque intra polygonum quodvis* LMNO (*Fig.* 51.) *vel in ejus perimetro, vel extra puncto* H, *ſi ad omnes angulos agantur rectae* HL, HM, HN, HO, *nec non ad laterum dimidia* Q, R, S, T *rectae* HQ, HR, HS, HT; *dico, reſiduum* $\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 + \overline{HN}^2 + \overline{HM}^2 - \overline{HQ}^2 - \overline{HR}^2 - \overline{HS}^2 - \overline{HT}^2$ *ſemper eſſe quantitatem conſtantem, nimirum* $= \frac{1}{4}(\overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NO}^2 + \overline{OL}^2)$.

Dem. Demiſſa ex H ad LO normali HZ, poſitoque acuto angulo LQH, habemus

$\overline{HL}^2 = \overline{LQ}^2 + \overline{HQ}^2 - 2\,LQZ$

$\overline{HO}^2 = \overline{LQ}^2 + \overline{HQ}^2 + 2\,LQZ$; unde

$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 = 2\overline{LQ}^2 + 2\overline{HQ}^2$; ſive auferendo hinc inde $2\,\overline{HQ}^2$,

$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 - 2\overline{HQ}^2 = \frac{1}{2}\overline{LO}^2$, & ſic de reliquis, nempe

$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 - \overline{HQ}^2 = \frac{1}{2}\overline{LO}^2$; $\overline{HO}^2 + \overline{HN}^2 - 2\overline{HT}^2 = \frac{1}{2}\overline{ON}^2$;

$\overline{HN}^2 + \overline{HM}^2 - \overline{HS}^2 = \frac{1}{2}\overline{MN}^2$; $\overline{HM}^2 + \overline{HL}^2 - 2\overline{HR}^2 = \frac{1}{2}\overline{LM}^2$;

quibus in unam ſummam redactis, prodit

$2\overline{HL}^2 + 2\overline{HO}^2 + 2\overline{HN}^2 + 2\overline{HM}^2 - 2\overline{HQ}^2 - 2\overline{HR}^2 - 2\overline{HS}^2 - 2\overline{HT}^2 = \frac{1}{2}\overline{LO}^2 + \frac{1}{2}\overline{ON}^2 + \frac{1}{2}\overline{NM}^2 + \frac{1}{2}\overline{ML}^2$; ſumptiſque dimidiis,

$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 + \overline{HN}^2 + \overline{HM}^2 - \overline{HQ}^2 - \overline{HR}^2 - \overline{HS}^2 - \overline{HT}^2 = \frac{1}{4} (\overline{LO}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 + \overline{ML}^2)$; *quod erat primum*.

Si punctum H ſumatur in latere aliquo LO, ſitque Z; erit (*per* 9. 2. *Elem.*) $\overline{LZ}^2 + \overline{ZO}^2 = 2\overline{ZQ}^2 + 2\overline{LQ}^2$, adeoque $\overline{LZ}^2 + \overline{ZO}^2 - 2\overline{ZQ}^2 = \frac{1}{2}\overline{LO}^2$, cetera ut ante peragantur, etiam cum punctum H in aliquo angulorum vertice accipiatur; *quod erat ſecundum*.

Si deinque punctum H ponatur in latere aliquo ML ad libitum protracto, ſitque X; erit (*per* 10. 2. *Elem.*) $\overline{XM}^2 + \overline{XL}^2 = 2\overline{XR}^2 + 2\overline{LR}^2$, ſive $\overline{XM}^2 + \overline{XL}^2 - 2\overline{XR}^2 = \frac{1}{2}\overline{LM}^2$; reliqua methodo expoſita oſtendentur, *quod erat tertium*.

Corollarium I.

94. Si polygonum fuerit triangulum ABD (*Fig.* 44.), in quo ab angulis ad ſubtenſarum dimidia, ductae ſint AF, BH, DE; quum ex dictis (85.) ſit $\overline{CF}^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2$; $\overline{CE}^2 = \frac{1}{4}\overline{CD}^2$; $\overline{CH}^2 = \frac{1}{4}\overline{CB}^2$; evadet $\overline{CA}^2 - \frac{1}{4}\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - \frac{1}{4}\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 - \frac{1}{4}\overline{CD}^2$, ſeu $\frac{3}{4}\overline{CA}^2 + \frac{3}{4}\overline{CB}^2 + \frac{3}{4}\overline{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2)$ quare ſumptis hinc inde quadruplis fiet $3\overline{CA}^2 + 3\overline{CB}^2 + 3\overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2$.

Corollarium II.

95. Si pro polygono habeatur parallelogrammum ABCD (*Fig.* 52.), punctumque H ſumatur in duarum diagonalium AC, BD interſectione; ductis per H recta MN lateri alterutro AB, nec non RS lateri alterutro AD pa-

rals

rallelis, erit $\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{HD}^2 - \overline{HM}^2 - \overline{HN}^2 - \overline{HR}^2 =$
$\overline{HS}^2 = 2\overline{HA}^2 + 2\overline{HB}^2 - 2\overline{HM}^2 - 2\overline{HR}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AD}^2$, ſeu
$4(\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 - \overline{HM}^2 - \overline{HR}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$, ſeu $4\overline{HA}^2 + 4\overline{HB}^2 =$
$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \quad 4\overline{HM}^2 + 4\overline{HR}^2$, ſeu $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2$

T H E O R E M A XXIX.

96. *Inter omnia triangula* ABD, GIK (Fig. 53. 54) *cum iſoperimetra, tum aequalia, in quibus ex quocumque puncto rectae ad angulos educantur; ſi triangulum* ABD *ſit aequilaterum, ac punctum* C *intra iſtud aſſumptum dividat* AF (*ab aliquo angulo* A *exeuntem*, & *uſque in ſubtenſae* BD *dimidium* F *protractam*), *ita ut ſit* CF $= \frac{1}{3}$ AF; *dico aggregatum* $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$ *fore minimum*.

Dem. Finge, punctum L ita eſſe intra triangulum GIK acceptum, ut aggregatum $\overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2$ comparate ad triangulum ipſum ſit minimum. Ex ſuperioribus (94) ſtabit $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 . \overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 : \overline{GI}^2 + \overline{GK}^2 + \overline{IK}^2$. Sed ſi triangula perimetros habeant aequales, erit $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + < \overline{CI}^2 + \overline{GK}^2 + \overline{IK}^2$ (75.); ergo $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 < \overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2$, adeoque ceterorum etiam omnium hujuſmodi aggregatorum, ſumpto ubicumque puncto L, *minimum* (86.); idque potiori jure ſi triangula, ſint aequalia, tunc enim aequilaterum minimam habet perimetrum (9.). Q. E. D.

Scho-

Scholion.

97. Hoc Theoremate continetur etiam caſus, cum rectae ex triangulorum angulis diſcedentes ipſos bifariam dividunt, notum eſt enim, hujuſmodi rectas in eodem puncto interſecari. Ponamus, in triangulo GIK (*Fig.* 54) rectas GN, KM, angulos IGK, GKI bifariam dividentes, ſe interſecare in puncto L, & ex puncto L ad angulum GIK duci LI, dico, ob iſta angulum GIK bifariam dividi. Etenim (*per* 3. 6. *Elem.*) habemus GI : GO = IL : LO, pariterque, IK : KO = IL : LO, quare GI : GO = IK : KO; & permutando, GI : IK = GO : KO; adeoque angulus quoque GIK ab LI bifariam dividitur. In triangulo autem aequilatero ABD (*Fig.* 53.) patet, rectas AF, BH, DE ad laterum dimidia E, F, H ex angulis eductas angulos ipſos bifariam ſecare, anguloſque ACB, ACD, BCD eſſe invicem aequales.

Theorema XXX.

98. *Punctis* C, L (Fig. 53. 54.) *ubicumque ſumptis, ſi ad dimidia* E, F, H, M, N, O, *laterum triangulorum omnium cum iſoperimetrorum, tum aequalium* ABD, GIK *agantur rectae* CE, CF, CH, *nec non* LM, LN, LO, *& in triangulo aequilatero* ABD *punctum* C *in recta* AF, *ex aliquo angulo* A *ad lateris* BD *dimidium* F *ducta, tale accipiatur, ut ſit* CF $= \frac{1}{3}$ AF; *dico, aggregatum*, $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ *eſſe conſimilium omnium aggregatorum in triangulo quolibet* GIK *minimum.*

Dem. Ex omnibus triangulorum angulis ad laterum dimidia rectae AF, BH, DE, itidemque GN, IO, KM ſint eductae. Junctis EF, FH, HE, nec non MN, NO, OM, [illegible]que triangulis iſoperimetris, quoniam FH $= \frac{1}{2}$ AD, EH $= \frac{1}{2}$ BD, EF $= \frac{1}{2}$ AD, pariterque MN =

a

$\frac{1}{2}$ GK, NO = $\frac{1}{2}$ GI, MO = $\frac{1}{2}$ *IK*, etiam triangula, EFH, MNO erunt iſoperimetra. Statutis autem iiſdem triangulis aequalibus, quum unumquodque ſit duplum parallelogrammorum inſcriptorum EBFH, MINO, haec parallelogramma erunt aequalia, ac proinde aequalia eorum dimidia, hoc eſt triangula EFH, MNO. Sed $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ in triangulo ABD eſt minimum, & item minimum $\overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 + \overline{LO}^2$ in triangulo GI*K* (87.) praetereaque in utroque caſu primum aggregatum $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ comparate ad triangulum EFH eſt minimum omnium aggregatorum $\overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 + \overline{LO}^2$ ratione habita ad triangulum MNO (96.), ergo &c.

C o r o l l a r i u m

99. Hinc in utroque caſu etiam $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ erit *minimum* comparate ad omnia aggregata $\overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2 + \overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 + \overline{LO}^2$, adeoque ad reliqua omnia ejuſmodi aggregata, ubicumque puncta L collocare libeat. At ſi rectae ex angulis ad laterum dimidia ductae tantummodo conſiderentur, ſtatim colligetur, eſſe quoque aggregatum $\overline{AF}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{DE}^2$ prae omnibus aggregatis $\overline{GN}^2 + \overline{IO}^2 + \overline{KM}^2$ *minimum*.

T H E O R E M A XXXI.

100. *Inter omnia aggregata quadratorum ex ambabus dia-*

diagonalibus in parallelogrammis cum iſoperimetris, tum aequalibus; illud, quod fit in quadrato, eſt minimum.

Dem Quadrata ex diagonalibus ſunt ut aggregata ex laterum quadratis (95.), ſed aggregatum ex laterum quadratis in quadrato eſt minimum, cum omnia parallelogramma ſunt iſoperimetra (42.), quod multo magis fit verum cum parallelogramma ſunt aequalia (47.): ergo &c.

THEOREMA XXXII.

101. *In quocumque polygono regulari* ABDEF (*Fig.* 29.), *cujus centrum* C, *ductis ad omnes angulos rectis* CA, CB, CD, CE, CF, *nec non ex puncto* H *ubicumque ſumpta rectis* HA, HB, HD, HE, HF; *dico, aggregatum* $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2$ *eſſe minimum prae quibuslibet aggregatis* $\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HD}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{HF}^2$.

Dem. Rectae aequales CA, CB, CD, CE, CF, que in C angulos omnes aequales efficiunt, aggregatum componunt minus aggregato quolibet HA, HB, HD, HE, HF, ubicumque punctum H vel intra, vel extra polygonum, vel in ejus perimetro collocetur (67.). Sed ſi foret $CA + CB + CD + CE + CF = HA + HB + HD + HE + HF$, foret etiam $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 < \overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HD}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{HF}^2$ (75.); ergo potiori jure prius quadratorum aggregatum *minus* erit poſteriori. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

102. Iidem ſi puncta C, H cum punctis G, I, K, L, M polygoni latera bifariam ſecantibus connectantur, pari modo demonſtrabitur $\overline{CG}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CK}^2 + \overline{CL}^2 + \overline{CM}^2 < \overline{HG}^2 + \overline{HI}^2 + \overline{HK}^2 + \overline{HL}^2 + \overline{HM}^2$; eſt enim $CG + CI + CK + CL + CM$ aggregatum minimum prae omnibus aggregatis HG

$+\overline{HI}+\overline{HK}+\overline{HL}+\overline{HM}$, ob angulos GCI, ICK, KCL, LCM, MCG aequales (68). Id etiam ſtatim apparet, ſi puncta I, G, M, L, K connectantur, novum quippe prodit polygonum regulare.

COROLLARIUM II.

103. Quapropter ſummam colligendo, etiam $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2+\overline{CD}^2+\overline{CE}^2+\overline{CF}^2+\overline{CG}^2+\overline{CI}^2+\overline{CK}^2+\overline{CL}^2+\overline{CM}^2$ erit *minimum.*

THEOREMA XXXIII.

104. *Inter omnia polygona ejuſdem generis cum iſoperimetra, tum aequalia* ABDE, LMNO (Fig. 51. 55.), *in quibus ex punctis quibuslibet* C, H *vel intra, vel extra ipſa, vel in eorum perimetris acceptis, eductae ſint ad omnes angulos rectae* CA, CB, CD, CE, *nec non* HL, HM, HN, HO, *& ad laterum dimidia rectae* CF, CG, CI, CK, *pariterque* HQ, HR, HS, HT, *regulare* ABDE *habet quodcumque* $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2+\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-\overline{CF}^2-\overline{CG}^2-\overline{CI}^2-\overline{CK}^2$ *ſemper* minus *quodcumque* $\overline{HL}^2+\overline{HM}^2+\overline{HN}^2+\overline{HO}^2-\overline{HQ}^2-\overline{HR}^2-\overline{HS}^2-\overline{HT}^2$.

Dem. Quum enim primum reſiduum ſit ad ſecundum, ut $\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EA}^2$ ad $\overline{LM}^2+\overline{MN}^2+\overline{NO}^2+\overline{OL}^2$ (93.), ſitque $\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EA}^2<\overline{LM}^2+\overline{MN}^2+\overline{NO}^2+\overline{OL}^2$ (75.); erit in utroque caſu primum reſiduum altero *minus.* Q. E. D.

LEMMA.

105. *Eſto triangulum* ABC (Fig. 56.) *rectangulum in* C, *& ex angulo* B *ducatur utcumque ad latus* AC *intra puncta* A, C *recta* BD; *dico, eſſe* AC *ad* CD *in majori ratione quam angulus* ABC *ad angulum* DBC.

Dem.

Dem. Centro B, radio DB deſcribatur peripheria EDF, quae ſecabit AB in E, & occurret rectae BC in F. Quoniam triangulum ABD majus eſt ſectore BED, & triangulum DBC minus ſectore BDF, triangulum ADB ad triangulum DBC majorem habebit rationem quam ſector BED ad ſectorem BDF; ſumptiſque proportionalibus, AD: DC > ang. ABD: DBC; ſeu componendo, AD: CD > ang. ABC: DBC. Q. E. D.

THEOREMA XXXIV.

106. *Ex univerſis figuris rectilineis regularibus iſoperimetris, triangulum eſt* minimum.

Dem. Triangulo aequilatero ABC, & polygono quolibet regulari DEF (*Fig.* 57. 58.) in triangula iſoſcelia, & aequalia, quorum duo AGC, DHF, reſolutis, ex verticibus G, H demitte in baſes AC, DF normales *GK*, HL. Quum ſit (*ex hyp.*) AC > DF, *AK* > DL, ſumpta *KM* = DL, connecte MG. Erit AC ad perimetrum ABCA, ut angulus AGC ad quatuor rectos, pariterque DF ad perimetrum DEFD, ut angulus DHF ad quatuor rectos; quocirca ex aequo AC: DF = ang. AGC: DHF, aut dimidiatim *AK*: KM = ang. AGK: DHL. Sed *AK*: *KM* > ang. AG*K*. MG*K* (105.); ergo ang. AG*K*: DHL > AG*K*: MG*K*, adeoque MG*K* > DHL; idcirco ob angulos ad *K*, L rectos, ang. GM*K* < HDL. Fac ang. *K*MN = HDL, punctum N cadet ultra punctum G, & ob triangula, NM*K*, HDL aequalia & ſimilia, HL = NK > G*K*. Sed (*ex hyp.*) habemus G*K* ad HL, ut triangulum ABC ad polygonum DEF; ergo &c.

COROLLARIUM

107. Deficiente triangulo, ei ſuccedit quadratum, quadrato pentagonum, & ſic deinceps. Quamobrem ex figuris regularibus iſoperimetris, illa eſt *minor*, quae minore laterum, vel angulorum numero conſtat.

THEO-

THEOREMA XXXV.

108. *Ex univerſis figuris rectilineis regularibus aequalibus, triangulum* maxima *gaudet perimetra*.

Dem. Eadem retenta figurarum deſcriptione, propter ang. AGC > DHF (*Fig.* 57. 58.), fac ang. *K*GM = LHD. Quoniam triang. GAC eſt ad BAC, ut angulus AGC ad quatuor rectos, & triangulum HDF ad polygonum DEF, ut angulus DHF ad quatuor rectos, erit ex aequo triang. GAC : HDF = ang. AGC : DHF, ſumptiſque dimidiis, triang. GA*K*. HDL = ang. AG*K* : DHL. Sed triang. GA*K* : GM*K* > ang. AG*K* : DHL (105.); ergo triang. GA*K* : GM*K* > GA*K* : HDL, quare triang. HDL majus ſimili GM*K* adeoque HL > G*K*. Sed HL ad G*K*, ut trianguli perimeter ad perimetrum polygoni; ergo &c.

COROLLARIUM

109. Ex polygonis regularibus aequalibus, illud, quod minori laterum, vel angulorum numero conſtat, reliquorum *majori* praeditum eſt perimetro.

THEOREMA XXXVI

110. *Ex omnibus parallelogrammis, quae triangulo cuilibet circa eundem angulum inſcribi poſſunt; illud, cujus unum, vel duo protracta latera biſariam ſecant trianguli latera ſaltem duo, eſt* maximum.

Dem. Trianguli ABC (*Fig.* 59.) diviſis biſariam lateribus in punctis D, E, F, per iſta eidem inſcribatur circa angulum B parallelogrammum BDFF, & aliud quodvis parallelogrammum BGHI. Propter BF. FC > BI. IC (32.) erit BF : BI > IC : FC; ſed IC : FC = HI : EF; ergo BF : BI > HI : EF, ex quo BF. FE > BI. IH. Sed ſi foret BF. FE = BI. IH, foret etiam parallelogrammum BE aequale parallelogrammo BH (*per* 24. 6. *Elem.*); ergo parallelogrammo BDEF habens angulum B cum parallelogrammo BGHI communem, erit iſto ſemper *majus*. Q. E. D.

Co-

Corollarium. I.

111. Si velis, maximum parallelogrammum triangulo ABC inſcriptum, non eſſe circa angulum B, ſed circa angulum A, duc diagonalem DF, eique parallelam IK, & habebis parallelogrammum ADFE, quod quum ſit aequale parallelogrammo BDEF, erit *maximum* omnium parallelogrammorum AHIK parallelogrammis BGHI aequalium. *Maximum* autem parallelogrammum circa angulum C erit DFCE, parallelogrammo BDEP & ipſum aequale.

Corollarium II.

112. Si jubeas, parallelogrammum ad quaeſtionem attinens non habere angulum communem cum aliquo ex angulis trianguli dati AHK (*Fig.* 60.), cui ſit inſcribendum; diviſis bifariam duobus lateribus, puta AH, AK, in punctis D, E junctaque DE, age DB, EF quomodolibet inter ſe parallelas uſque ad occurſum baſeos HK. Parallelogrammum BDEF erit unum ex *maximis*, quae triangulo AHK inſcribi poſſunt; ducta enim EG lateri AH parallela, parallelogrammum BDEF erit aequale parallelogrammo DEGH. Sed hoc eſt inſcriptorum maximum; ergo & illud.

Corollarium. III.

113. Innumera igitur parallelogramma *maxima*, adeoque invicem aequalia, eidem triangulo inſcribi poſſunt.

Corollarium IV.

114. Idem parallelogrammum DEFB (*Fig.* 61.) eſſe poteſt *maximum* inſcriptum infinitorum triangulorum, quae nullum habeant angulum cum ipſo communem. Ducta enim quavis IC, quae bifariam dividatur ab angulo D dicti parallelogrammi DEFB, jungatur CE, protrahaturque uſque ad occurſum in L cum latere HK, & ita ſemper; oſtentur triangula CIL, AHK, & alia innu-

innumera, quae *maximum* commune parallelogrammum inſcriptum habebunt DEFB; latus enim DE dicti parallelogrammi DEFB duo triangulorum omnium recenſitorum latera CI, CL biſariam ſemper dividit.

Corollarium V.

115. Triangulum eſt duplum maximi ſibi inſcripti parallelogrammi, ac propterea omnia triangula, quae idem maximum parallelogrammum, vel aequalia maxima parallelogramma habent inſcripta, ſunt aequalia; & ſi ſunt aequalia, maxima parallelogramma iis inſcripta ſunt pariter aequalia; generatim verò triangula ſunt ut maxima parallelogramma iis inſcripta.

Theorema XXXVII.

116. *Si per verticem* A (Fig. 61.) *trianguli cujuſvis* AHK *ſingas in infinitum protendi rectam* MN *baſi* HK *parallelam; inter omnia triangula, quorum crura per dimidia* D, E *laterum* AH, AK *tranſeant, baſeſque habeant in recta* HK *producta, ſed vertices vel ultra, vel citra infinitam* MN, *triangulum* AHK *erit minimum*.

Dem. Quum enim hujuſmodi triangulorum crura non ſint vi parallelarum biſariam ſecta, parallelogrammum DEFB non erit eorum maximum, ac proinde minus quam eorum maximum. Sed triangula ſunt parallelogrammorum maximorum iis inſcriptorum dupla (115.) ergo triangulum AHK eſt recenſitorum triangulorum *minimum*. Q. E. D.

Theorema XXXVIII.

117. *Ex omnibus triangulis eidem parallelogrammo ad eandem altitudinem circumſcriptis, triangulum iſoſceles minima clauditur perimetro.*

Dem. Eidem parallelogrammo GATH (*Fig.* 62.), vel GKIH circumſcribantur ad eandem altitudinem BL, vel EP triangula ABC, DEF. Ob BL = EP, ML = NP, erit

D BM

BM = FN, ac proinde BM : BL = EN : EP. Sed BM : BL = GH : AC, itidemque EN : EP = GH : DF; ergo GH : AC = GH : DF, adeoque AC = DF, ex quo liquet, triangula BAC, EDF eſſe aequalia, & intra eaſdem parallelas. Sed ex hujusmodi triangulis iſoſceles minimam habet perimetrum (1.), ergo &c.

THEOREMA XXXIX.

118. *Inter univerſa triangula, quae parallelogrammis omnibus aequalibus circumſcribi poſſunt, iſoſceles, cujus maximum parallelogrammum inſcriptum habet quadratum altitudinis ad baſeos quadratum, ut 3 ad 4, minima perimetro circumdatur.*

Dem. Esto inter omnia parallelogramma aequalia parallelogrammum ABCD (*Fig.* 63.), ſeu ABFH, in quo altitudinis EF quadratum ſit ad quadratum baſeos CD, vel FH, ut 3 ad 4, eique ſit circumſcriptum triangulum iſoſceles GHI, cujus latera a parallelogrammi lateribus biſariam dividantur. Quoniam CD = FH, FE = EG, erit $\overline{GF}^2 : \overline{FI}^2 = 12 : 4 = 3 : 1$; quare triangulum GHI eſt aequilaterum. Sed omnia triangula, quorum latera a parallelogrammorum aequalium inſcriptorum lateribus biſariam dividuntur ſunt & ipſa aequalia (115.); ergo triangulum aequilaterum *minimam* prae ipſis habet perimetrum (9.). At cetera omnia triangula, de quibus eſt quaeſtio, ſunt dictis aequalibus ſemper majora (116.); ergo &c.

THEOREMA XL.

119. *Inter omnia parallelogramma triangulis iſoperimetris inſcripta; illud, in quo altitudinis quadratum eſt ad quadratum baſeos, ut 3 ad 4, ceterorum eſt* maximum.

Dem. Parallelogrammo ABCD (*Fig.* 63.), vel ABFH, ejus naturae, ut ſuae altitudinis EF quadratum ſit ad quadratum baſeos CD, vel FH, in ratione 3 ad 4, concipe

cipe circumſcriptum triangulum GHI, cujus latera a parallelogrammi lateribus ſint bifariam ſecta. Triangulum iſtud erit aequilaterum, adeoque omnium iſoperimetrorum maximum (12.). Itaque ſi finges, ſingulis triangulis triangulo GHI iſoperimetris maximum inſcribi parallelogrammum, ſingula ejuſmodi parallelogramma (quippe quae triangulorum, quibus inſcribuntur, ſunt dimidia) erunt trianguli *GHI* parallelogrammo maximo ABCD minora. Sed ſi dicta parallelogramma non ſint iiſdem triangulis maxima inſcripta multo magis erunt dicto parallelogrammo ABCD minora; ergo &c.

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATIS

PARS PRIMA

LIBER II.

De Circulo, ejuſque inſcriptis, & circumſcriptis.

LEMMA

120. D*Eſcripto intra angulum quemvis* MAN (Fig. 64.) *circulo* DEF, *vel ejus ſegmento* EDK *tangente ipſius anguli crura in* E, K, *actiſque ex quotlibet circumferentiae punctis* D, T *tangentibus* BC, GH *ad anguli dati crura hinc inde in* B, C, G, H, *ajo, omnia triangula* ABC, AGH *hinc prodeuntia eſſe iſoperimetra.*

Dem. Propter tangentes BD, BE in puncto B ſibi occurrentes, habemus (*ex* 36. 3*i*. *Elem.*) BD = BE; quare trianguli ABC perimeter aequatur duabus AE, AK. Pari ratione quum ſit GT = GE, TH = HK, poſitis communibus AG, AH, trianguli AGH perimeter iiſdem AE, AK aequalis erit, ac proinde triangulorum quotcumque recenſitorum ABC, AGH perimetri ſemper invenientur aequales. Q. E. D.

THEOREMA I.

121. *Lemmatis conſtructione retenta, ductiſque praeterea*

terea in circuli DEF parte infra EK *ex punctis* F, R *tangentibus* MFP, IRL *uſque ad anguli* A *crura* AM, AN; *dico, quod ſi triangula* ABC, AIL *ſint iſoſcelia, triangulum* ABC *in primo caſu* maximam *habebit aream*, maximum *crurum rectangulum* FAK *comparate ad reliqua triangula* AGH, *& tangens* BC *erit* minima *omnium* GH; *in ſecunda autem caſu triangulum* AIL minimam *prae omnibus* AMP *habebit cum aream, tum perimetrum*, minimum *crurum rectangulum* IAL, *ac tangens* IL *erit* minima *omnium* MP.

Dem. Quum enim ex lemmate (120.) triangula *ABC*, AGH ſint iſoperimetra, angulus A communis, & triangulum ABC iſoſceles, hoc ex dictis (24.) erit *maximum, maxima* gaudebit crurum rectangulo, & *minimam* habebit baſim; *quod erat primam, ſecundam, & tertium*.

Quia Q punctum interſectionis ipſarum IL, MP eſt (ratione habita ad punctum I) ultra punctum contactus R, erit IQ > QL; ſumpta igitur SQ = QL, ductaque SV poſt PL parallela, erunt triangula SQV, PQL ſimilia, & aequalia; quapropter triang. QPL ⊲ QIM, poſitoque communi trapetio AIQP, triang AIL ⊲ *A*MP, ergo ex jam oſtenſis (13. 18.) patet, potiori jure ipſum triangulum *A*IL *minima* quoque perimetro, *minima* crurum rectangulo, ac baſi *minima* prae ceteris *A*MP affici; *quod erat quartam, quintum, ſextam, & ſeptimum*.

THEOREMA II.

122. *Ex omnibus triangulis* ACB, *A*HB (Fig. 63.) *quorum baſis communis* AB *ſit extra circulum* CDE, *verticeſque* C, H *ſint in ejuſdem circumferentia convexa; illud* ACB, *cujus crura* AC, CB *cum circuli radio* CF *duos angulos* ACF, BCF *aequales efficiunt*, minima *claudetur perimetra*.

Dem. Finge, duci per punctum C contingentem indefinitam IL, punctumque K, in quo IL ſecat AH, jungi

eum B. Quoniam anguli ACF, BCF, nec non ICF, LCF ſunt aequales, anguli quoque ACI, BCL aequales erant; ergo aggregatum AC † BC erit minus aggregato quolibet AK † BK (2.) ac multo magis aggregato reſpondente AH † BH; quare &c.

C o r o l l a r i u m

123. Per hoc igitur Theorema ex datis duobus extra circulum punctis ducere poſſumus ad circumferentiae convexae punctum duas rectas, quarum aggregatum ſit *minimum*.

T H E O R E M A III.

124. *Ex omnibus triangulis* ACB, AHB (Fig. 66.), *quorum baſis communis* AB *ſit extra circulum* GOCR, *verticeſque* C, *H ſint in ejus circumferentia concava, illud* ACB, *cujus crura* AC, CB *cum contingente* DE *in contactu* C *angulos* ACD, BCE *aequales efficiunt, maxima cingitur perimetro.*

Dem. Agatur diameter CG, jungaturque GH; tum per puncta C, *H* tranſeat recta *CHK*, in quam ex punctis A, B demittantur normales AI, B*K*, ac poſtmodum ita ductae intelligantur AS, BS, ut anguli ISA, BS*K* ſint aequales. Quoniam ang. LCE = BCD, ac DE eſt tangens, erit arcus LG aequalis arcui ON, quare arcus *M*G (tranſitu rectae *AH*, & diametri CG reſectus) minor eſt arcu GP a CG, & B*H* reſciſſo, ex quo ang. *MH*G < G*H*P. Sed anguli G*H*C, G*HK* ſunt recti; ergo ang. A*H*I > B*HK*, ac proinde *A*I . B*K* > I*H* : *HK*; ſed ob triangula ſimilia *A*IS, BS*K*, ſtat *A*I : BK = IS : S*K*; ergo IS : S*K* > I*H* · *HK*, unde conſtat, punctum S eſſe ultra puncta C, *H*. Sed *A*S † SB eſt minimum aggregatum rectarum, quae ex punctis *A*, B ad rectam CK duci poſſunt (2.); ergo quum punctum C a puncto S magis diſtet quam punctum *H*, erit *A*C † BC > *AH* † *H*B (8.), adeoque triangulum *A*CB *majori* quam *AH*B perimetro donabitur. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM

125. Datis ergo extra circulum duobus punctis, diſcimus duas rectas ex ipſis ad circumferentiae concavae punctum ducere, quarum aggregatum ſit *maximum*.

THEOREMA IV.

126. *Si ducta quavis chorda GM* (Fig. 67. 68.) *rectae AB poſitione extra circulum GEM datae parallela, et ex centro F demittatur normalis FD, quae protrahatur uſque ad circumferentiam in C, ductaque IL circulum contingente in C, connectantur AC, CB; dico ex omnibus triangulis AHB baſim communem AB, verticeſque H in circumferentia habentibus, triangulum ACB eſſe minimum, cum punctum C eſt in circumferentia convexa, maximum, cum in circumferentia concava.*

Dem. Ad punctum enim *K*, ubi b*H* ſecatur a contingente IL, ducta *AK*, liquet, triangulum *AKB* = *ACB* ⊲ *AHB* in *Fig.* 67. *majus* verò in *Fig.* 68. Q. E. D.

THEOREMA V.

127. *Si triangulo quovis iſoſcele BAC* (Fig 69. 70.) *circulo BAE inſcripto, ex ejus vertice A ducantur AD, AE, a quarum altera AD ſecetur baſis BC in D, ab altera vero AE circumferentia in E, ita ut anguli BAD, CAE ſint aequales, & ſic ſemper; dico, inter omnia aggregata AD † AE, aggregatum AB † AC eſſe minimum, etiam cum AD, AE in unam rectam, ut AH, AI coeunt.*

Dem. Juncta CE, triangula ABD, CAE erunt ſimilia, anguli enim *ABD*, *AEC* ſunt aequales, quippe qui eidem arcui *AC* in *Fig.* 69. inſiſtunt, & in *Fig.* 70. ſunt complementa ad duos rectos ejuſdem anguli *ABC*; unde eicitur *AB* : *AD* = *AE* : *AC*, adeoque *AB* . *AC* = *AD* . *AE*; ſed latera *AB*, *AC* ponuntur aequalia; ergo *AB* † *AC* ⊲ *AD* † AE (47.), *quod erat primum*.

Juncta IC, ob triangula ſimilia AIC, ABH, habemus *AB* : *AH* = *AI* : *AC*, quare *AB* . AC = *AH* . *AI*, ac proinde *AB* † *AC* < *AH* † *AI*; *quod erat ſecundum*.

THEOREMA VI.

128. *Ex omnibus triangulis intra circulare ſegmentum conſtitutis, iſoſceles* maximo *cum area, tum perimetro, nec non* maximo *crurum rectangulo gaudet*.

Dem. Triangula *A*BC, DBC (*Fig.* 71.) intra ſegmentum circulare B*A*DC conſtituta, eidem baſi BC inſiſtunt, anguloſque BAC, BDC aequales habent. Ergo ex dictis (14.) res patet.

COROLLARIUM

129. Semicirculi *A*FD (*Fig.* 72.) radio C*A* indefinite verſus N protracto, in aliquo ejus puncto *H* formetur angulus quilibet C*H*B, cujus crus *H*B occurrat circumferentiae in B, tum ſumpto alio puncto E, agatur EF ipſi *H*B parallela occurrens circumferentiae in F, & ita porro. Ex triangulis hinc genitis C*H*B, CEF haberi poteſt illud, cujus tam area, quam perimeter ſit *maxima*. Per tria enim puncta *B*, C, *H* fac, ut tranſeat circulus, intra quem in chorda CB conſtituatur triangulum iſoſceles, hujus crus alterutrum, puta CE, aperiet radio C*A* producto, incipiendo a centro C. Centro E, intervallo EC deſcribe arcum, qui ſecet ſemicirculum *A*FD in puncto F, & duc FE. Triangulum CEF, & aggregatum CE † EF erunt *maxima*, nam triangula B*H*C, CEF ſunt angulis verticalibus, nec non baſibus aequalibus praedita. Quod ſi agas indefinitam CM, quae cum CN faciat angulum MCN dimidium anguli CEF, producaſque B*H*, FE uſque ad occurſum ipſius CM, inter omnes BM erit FL *maxima* propter triangula iſoſcelia C*H*M, CEL. Quin etiam quum triangula BCM, FCL angulos M, L habeant aequales, & baſibus aequalibus CB, CF inſiſtant, ſi reperiatur ut ſupra triangulum iſoſceles BCM, hoc omnium CFL erit *maximum*.

Scho-

Digitized by Google

Scholion.

130. Interim eſt animadvertendum, 1.° ſi ducas *CK* alterutri *HB*, EF parallelam, punctum *K* in circumferentia limitem alterum conſtituere, quem parallelae *HB*, EF attingere nequeunt. 2. trianguli maximi verticem nec in medio radij *AC*, nec ultra verſus centrum C cadere poſſe, ſecus arcus CF circumferentiam *AFD* nuſquam ſecaret. 3. in quadrante *ABPC* triangulum rectangulum BRC, vel BCT eſſe *maximum*, ac *maximam* habere perimetrum, ſi fuerit BR = RC, vel BT = TC, adeoque 4. quadratum eſſe *maximum* parallelogrammum quadranti inſcriptum, *maximaque* affici perimetro. 5. triangulum iſoſceles BCS, cujus angulus BCS ſit rectus, eſſe in ſemicirculo prae reliquis vertices in centro habentibus *maximum*, quapropter 6. rectangulum RS ex duobus quadratis maximis duobus quadrantibus *APC*, CPD inſcriptis conflatum, eſſe *maximum* parallelogrammum ſemicirculo inſcriptum, ac *maxima* cingi perimetro; denique quadratum eſſe *maximum* parallelogrammum circulo inſcriptum, & *maxima* perimetro circumdari.

Theorema VII.

131. *Intra ſegmentum circulare ADCB* (Fig. 73.) *ductis chordis omnibus AC, CB; AD, DB, ſi ſiat DE multiplex rectae DB, ut aſſumpta fuit CF multiplex CB (hoc eſt ſi accipiatur* DE = mDB, CF = m CB, *& ita ſemper*), *ac per puncta A, F, B deſcribatur circulus ABFE, recta AE per hujus circuli centrum G traducta, & circumferentiam ADCB ſecans in puncto D determinabit aggregatum AD* † m *DB, quod omnium aggregatorum AC* † m *CB erit* maximum.

Dem. Ductis enim EB, FB, quoniam in triangulis EBD, FBC anguli EDB, FCB ſunt aequales, & latera *E*D, DB lateribus FC, CB proportionalia, anguli *AEB*, *AFB* erunt & ipſi aequales, ac proinde puncta quaecumque F erunt

ſimul

ſimul cum puncto E in eadem circumferentia *ABFE*. Sed diameter *AE* eſt omnium chordarum *AF* maxima; ergo &c.

Scholium

132. Quo plus DE > DB, pariterque *CF* > *CB*, eo magis anguli *AEB*, *AFB* acutiores redduntur, adeoque circulus *ABFE* major fit, quo in caſu centrum G magis recedit a dato arcu ADB, quare poſito hoc arcu ſemicircumferentia minore, quando punctum, ſeu centrum iſtud G aſcendens per *KH* (quae arcus dati chordam AB bifariam, & normaliter ſecat) ad *H* pervenerit, ita ut juncta *HA* dicti arcus tangens evadat, methodus allata deficit, & idcirco tunc tantummodo Theorema eſt poſſibile, cum centrum circuli deſcribendi *ABFE* jacet inter punctum *H*, per quod tranſit tangens *AH*, & arcus dati dimidium I. Si verò arcus *ADB* ſit ſemicircumferentiae aequalis, conſtat, tangentem *HA* fore normalem diametro *AB*, quae chordae vices ſubit, quapropter haec tangens ſecare nunquam poterit *KG*, cui eſt parallela; quum igitur hoc in caſu nulla *HA* fieri poſſit tangens in *A*, Theorema ſemper erit poſſibile. Itidem ſemper erit poſſibile, ſi datus arcus ſit ſemicircumferentia major, quia tangens in *A* a recta *KG* ſemper divergit. Si quis DE rectae DB, pariterque CF rectae CB ſubmultiplicem facere cuperet, obſervet, punctum G tunc cadere inter puncta I, *K*, quia exiſtente CF = CB, centrum G cadit in arcus dati dimidium I; quare juncta GA, nulla circumferentiae daretur interſectio, adeoque Theorema foret impoſſibile. Quae omnia erant ſedulò determinanda.

THEOREMA VIII.

133. *Ex triangulis omnibus, quae circulo inſcribi poſſunt, aequilaterum maxima area, & maxima praeditum eſt perimetro.*

Dem.

Dem. Sint triangulum aequilaterum ABC (*Fig.* 74.), & alia quaelibet triangula ADE, AFG tam ſupra, quam infra baſim BC circulo *A*DME inſcripta. Junctis BG, BE, & ex chordae *A*E dimidio *H* excitata ad circumferentiam normali HI, ex punctis B, D demittantur ad AE normales BK, DL Quoniam AE < AC, adeoque arcus ADME > arcu ADMC, punctum I (dimidium arcus ADME) erit infra punctum B. Itaque propter BK > DL, triangulum ABE majorem aream, majoremque habebit perimetrum quam triangulum ADE (15.). Idem oſtendetur de triangulo ABG comparato ad triangulum AFG. Sed triangulum aequilaterum ABC majorem habet aream, majoremque perimetrum quam ſingula ABE, ABG (128.); ergo &c.

Corollarium. I.

134. Quum portio MN, a baſi BC trianguli aequilateri ABC reſecta, ſit quarta pars diametri AM, liquet, rectangulum ANC, quod in ſemicirculo AEM fit ab AN = $\frac{3}{4}$ AM ducta in normalem NC ex puncto N utque ad circumferentiam excitatam, eſſe *maximum*.

Corollarium II.

135. Circa trianguli cujuslibet ABC (*Fig.* 75.) baſim BC deſcripto ſemicirculo BFC, ſi ex portiuncula BE = $\frac{1}{4}$ BC puncto E erigatur ad circumferentiam normalis EF, atque ad trianguli latus AC ducatur ED alteri lateri AB parallela, rectangulum DEF erit *maximum* omnium GHI, quae ſimili ratione haberi poſſunt, ſunt enim DE, GH portionibus EC, HC proportionales.

Corollarium III.

136. Datis quibuſcunque polygonis regularibus, in quibus latera ſint in progreſſione 6, 12, 24, 48, &c. inter omnia triangula, quae ipſis inſcribi poſſunt, aequilaterum,

cujus

cujus vertex in aliquo eorum angulo exiſtit, *maximam* habet cum aream, tum perimetrum; reliqua enim triangula vel ſunt eidem circulo cum dictis polygonis inſcriptibilia, vel triangulis circulo inſcriptibilibus minora.

T H E O R E M A IX.

137. *In circulis* ACBE, ACFD (Fig. 76.) *ſe invicem interſecantibus in punctis* A, C *agantur per punctum* C *quotlibet rectae* BD, EF *circumferentiis utrinque terminatae, & connectantur* AB, AC, AD, AE, AF, *ut exurgant triangula* ABD, AEF, *ajo in triangulo* ABD, *cujus baſi* BD *eſt* AC *normalis*, *altitudinem* AC *eſſe* maximam, maximam *baſim* BD, *&* maximam *cum aream, tum perimetrum*.

Dem. Demittatur ex puncto A ad trianguli AEF baſim EF normalis AH; patet, in triangulo rectangulo AHC ſemper eſſe AC > AH, *quod erat primum*.

Ob angulos ABC, AEC aequales, nec non ob angulos aequales ADC, AFC, triangula ABD, AEF ſunt ſimilia; ſed altitudo AC major altitudine AH; ergo baſis BD *major* baſi EF, adeoque triangulum ABD *majus* triangulo AEF; *quod erat ſecundum, & tertium*.

Quoniam anguli ACB, ACD ſunt (*per hyp.*) recti, erunt AB, AD diametri circulorum ACBE, ACFD, quare AB † AD > AE † AF. Sed (*per dem.*) BD > EF, ergo trianguli ABD perimeter eſt *major* perimetro trianguli AEF; *quod erat quartum.*

T H E O R E M A X.

138. *Sumptis in rectae* AB (Fig. 77.) *dimidia* AG *quotlibet centris* K, L, *radiis* KA, LA *deſcribantur ſemicirculi* AHD, AIF, *tum ductis ex puncto* B *contingentibus* BH, BI, *junctiſque* KH, LI; *ſi* AD *fuerit dupla remanentis* DB; *ajo, inter omnia triangula* KHB, LIB *triangulum* KHB *eſſe* maximum.

Dem. Deſcripto circa diametrum AB ſemicirculo ACB, ex

ex punctis D, F excitentur ad ejus circumferentiam normales DC, FE, junganturque BC, BE. Quoniam BK + KH = BL + LI, & triangula KHB, LIB ſunt rectangula, erunt etiam triangula iſoſcelia iſoperimetra dimidiata, inter quae BHK, ob KB = 2HK erit dimidium trianguli aequilateri. Sed ex univerſis triangulis iſoperimetris aequilaterum eſt maximum (12.), ergo &c.

Corollarium

139. Ob eandem rationem ſi ex punctis D, F circulis AHD, AIF (*Fig.* 78.) applicentur DH, FI, ita ut ſit DH = DB, FI = FB, ac deinde connectantur AH, AI; omnium triangulorum rectangulorum AHD, AIF triangulum AHD in circulo, cujus diameter AD eſt dupla remanentis DB, conſtat, eſſe *maximum*.

Theorema XI.

140. *Stantibus iiſdem quae in Theorem. antec.* (138.) *& eadem ſervata conſtructione, dico, in circulo* ACB (Fig. 77.) *rectangulum* AD . BC *eſſe omnium* AF . BE maximum.

Dem. Quoniam *AB* . BD = $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2$, AB . BF = $\overline{BE}^2 = \overline{BI}^2$; erunt BC = BH, BE = BI. Sed KH . BH > LI . BI (138.), ſeu AD . BH > AF . BI; ergo AD . BC > AF . BE, & ita ſemper. Q. E. D.

Corollarium I.

141. Connexis AC, AE; quum ſit AD . BC, ut AB, AD . BC, nimirum ut $\overline{AC}^2$. CB, erit quoque $\overline{AC}^2$. CB *maximum*. Quia vero $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{DC}^2$ = AD : DB = 2 : 1, ſumpta AC pro altitudine, CB pro baſi, triang. ACB altitudo baſeos duplum poteſt. Quamobrem ex omnibus triangulis rectangulis eandem hypothenuſam habentibus, illud, cujus

ſus altitudo baſeos duplum poteſt, *maximo* gaudet producto, quod oritur altitudinis quadratum per baſim multiplicando.

Corollarium II.

142. Triangula ACD, CDB, itidemque AEF. EFB ſunt ſimilia; ergo AD.BC = AC.CD, AF.BE = AE.EF. Sed AD.BC > AF.BE (140.); ergo AC.CD > AE.EF. Et hic etiam propter $\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 = AD : DB = 2 : 1$, conſtat, triangulum ADC habere altitudinem AD, quae baſeos DC duplum poteſt. Praeterea quia AC.CD > AE.EF, erit quoque 2AC.2CD > 2AE.2EF; omnia vero triangula, quae circulo inſcripta eidem chordae inſiſtunt, perimetrum habent ſingula perimetro trianguli iſoſcelis minorem (128.); ergo ex univerſis triangulis, quae circulo eidem inſcribi poſſunt, iſoſceles illud, cujus baſis duplum poteſt altitudinis, *maximo* pollet rectangulo, quod fit baſim per crurum aggregatum multiplicando. Et viciſſim inter omnes circulos triangulis univerſis rectangula ex baſibus in crurum aggregata aequalia habentibus circumſcriptos; ille, qui triangulo iſoſceli, in quo baſis duplum poteſt altitudinis, circumſcribitur, eſt *minimus*.

Theorema XII.

143. *Si recta* AB (Fig. 77.) *ita dividatur in* D, *ut altera ejus portio* AD *ſit alterius* DB *dupla; ajo, factum ex quadrato duplae portionis in reliquam emergens fore* maximum *factorum omnium ex quadrato cujuſvis alius ejuſdem* AB *portionis* AF *in reliquam* FB *prodeuntium*.

Dem. Eadem figurae conſtructione ſervata; quoniam AD.BC > AF.BE (140.) erit AD : AF > BE : BC, pariterque $\overline{AD}^2 : \overline{AF}^2 > \overline{BE}^2 : \overline{BC}^2$; ſeu $\overline{AD}^2 : \overline{AF}^2 > FB : DB$; ergo AD.

$\overline{AD}^2 . DB > \overline{AF}^2 . FB$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

144. Productum $\overline{AD}^2 . DB = AD . AD . DB = AD . \overline{DC}^2$; ergo $AD . \overline{DC}^2$ eſt *maximum*; hoc eſt ex omnibus triangulis ſemicirculo inſcriptis, illud, cujus altitudo baſeos duplum poteſt, *maximum* habet productum ex baſeos quadrato in altitudinem.

COROLLARIUM II.

145. In trianguli ABR (*Fig.* 78.) latere aliquo AB ſumpta $AD = \frac{2}{3} AB$, tum ex D, & ex alio quovis puncto P ductis DM, PN lateri AR parallelis; erit $\overline{AD}^2 . DM > \overline{AP}^2 . PN$, eſt enim $DB : PB = DM : PN$.

COROLLARIUM III.

146. Si triangulum rectangulum ANC (*Fig.* 74.) ſemicirculo AGM inſcriptum ponatur aequilaterum dimidiatum, erit $AC = 2CN$; ſed $AC + CN > AE + EP$ (133.); ergo multo magis $\overline{AC}^2 . CN > \overline{AE}^2 . EP$; quare ex triangulis univerſis, quae eidem circulo inſcribi poſſunt, aequilaterum *maximo* gaudet producto, quod oritur tria ejuſdem latera inter ſe multiplicando; & viciſſim inter univerſa triangula, in quibus vel areae, vel perimetri, vel producta ex lateribus inter ſe multiplicatis aequantur, aequilaterum *minimo* circulo inſcribitur.

THEOREMA XIII.

147. *Si in ſemicirculi* AMF (Fig. 78.) *diametro* AF

ſumatur $AD = \frac{5}{6} AF$, *ac poſtmodum ad circumferentiam excitetur normalis* DM; *ajo, productum* $\overline{AD}^2 . DM$ *eſſe* maximum.

Dem. Ducta in puncto M tangente BM occurrente diametro AF in B, & huic normali AR in R, agatur radius QM; erit $\overline{DM}^2 = AD . DF = QD . DB$ ob triangulum rectangulum QMB, unde $AD : DB = QD : DF = 2 : 1$; ergo in triangulo ABR ducta ipſi DM quavis parallela PN, quae ſecabit circumferentiam in I, fiet $\overline{AD}^2 . DM > \overline{AP}^2 . PN$ (145.), ac potiori jure $\overline{AD}^2 . DM > \overline{AP}^2 . PI$. Q. E. D.

THEOREMA XIV.

148. *Si in quadrantis* FMSQ (Fig. 78.) *radio* QF *abſcindatur* QD, *ita ut ſit* $\overline{QD}^2 = \frac{2}{3} \overline{QF}^2$, *& reliqua ut in praecedenti conſtructione peragantur, dico, productum* $\overline{QD}^2 . DM$ *eſſe* maximum.

Dem. Quoniam $\overline{DM}^2 = \overline{FQ}^2 - \overline{DQ}^2 = \overline{FQ}^2 - \frac{2}{3} \overline{FQ}^2 = \frac{1}{3} \overline{FQ}^2$ & valet analogia $\overline{QD}^2 : \overline{DM}^2 = \overline{DM}^2 : \overline{DB}^2$, ſubſtituendo, ſtabit $\frac{2}{3} \overline{FQ}^2 : \frac{1}{3} \overline{FQ}^2 = \frac{1}{3} \overline{FQ}^2 : \overline{DB}^2 = \frac{1}{6} \overline{FQ}^2$, ſed $\overline{QD}^2 = \frac{2}{3} \overline{FQ}^2 = \frac{4}{6} \overline{FQ}^2$; ergo $\overline{QD}^2 : \overline{DB}^2 = \frac{4}{6} \overline{FQ}^2 : \frac{1}{6} \overline{FQ}^2 = 4 . 1$, quocirca etiam $QD : DB = 2 : 1$, adeoque $\overline{QD}^2 . DM > \overline{QP}^2 . PN$ (145.), ac multo magis $\overline{QD}^2 . DM > \overline{QP}^2 . PI$. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM

149. Sumpta in diametro AF aequaliter hinc inde a centro Q tam $\overline{QD}^2$, quam $\overline{QY}^2 = \frac{2}{3}\overline{QF}^2$; ſive $\overline{YD}^2 = \frac{2}{3}\overline{AF}^2$, & completo rectangulo YM, inter omnia rectangula ſemicirculo ASF inſcripta, rectangulum YM habebit productum MD. $\overline{DY}^2$ *maximum*.

THEOREMA XV.

150. *Si in quadrante* FMSQ (Fig. 78.) *radius* QF *ita ſecatur in* D *ut ſit* $\overline{QD}^2 = \frac{1}{3}\overline{QF}^2$; *erecta ad circumferentiam normali* DM, *ajo, productum* $\overline{MD}^2$. DQ *eſſe* maximum.

Dem. Quoniam poſito $\overline{QV}^2 = \frac{2}{3}\overline{QS}^2$, productum $\overline{QV}^2$. VZ eſt maximum (148.), ducta ZX ipſi QS parallela, erit quoque maximum productum $\overline{ZX}^2$. XQ. Sed ducto radio QZ, habemus $\overline{QZ}^2 = \overline{ZX}^2 + \overline{XQ}^2$, hoc eſt $\overline{QF}^2 = \overline{QV}^2 + \overline{QX}^2$, ſeu $\overline{QF}^2 = \frac{2}{3}\overline{QF}^2 + \overline{QX}^2$; ergo $\overline{QX}^2 = \frac{1}{3}\overline{QF}^2$. At (*per hyp*) $\overline{QD}^2 = \frac{1}{3}\overline{QF}^2$; ergo puncta X, D, nec non Z, M coincidunt, & $\overline{MD}^2$. DQ eſt *maximum*. Q. E. D.

COROLLARIUM

151. In diametro AF ſectis utrinque a centro Q tam $\overline{QD}^2$, quam $\overline{QY}^2 = \frac{1}{3}\overline{QF}^2$, ſive $\overline{YD}^2 = \frac{1}{3}\overline{AF}^2$, completoque rectangulo YM; ex omnibus rectangulis ſemicirculo ASF

inſcriptis, rectangulum YM habebit productum $\overline{MD}^2 . DY$ *maximum*.

THEOREMA XVI.

152. *Ex omnibus triangulis iſoſceliis* ABC, DEF (Fig. 79. 80.) *producta aggregati crurum in baſim aequalia habentibus, nimirum* $2AB . BC = 2DE . EF$, *ſeu* $AB . BG = DE . EH$; *illud* ABC, *cujus baſis* BC *duplum poteſt altitudinis* AG, maximum *habet productum* $\overline{BC}^2 . AG$, *quod oritur multiplicando baſeos quadratum per altitudinem.*

Dem. Trianguli hiſce circumſcribuntur circuli, quorum diametri AI, DL. Quoniam $AB . BG = DE . EH$, ſtabit $BG : EH = DE : AB$, pariterque $\overline{BG}^2 : \overline{EH}^2 = \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$, ſive ex natura circuli $\overline{BG}^2 : \overline{EH}^2 = LD . DH : IA . AG$; & ducendo antecedentes in AG, & conſequentes in DH, fiet $AG . \overline{GB}^2 : DH . \overline{HE}^2 = LD . DH . AG : IA . AG . DH = DL : AI$; ſed $DL > AI$ (142.); ergo etiam $AG . \overline{GB}^2 > DH . \overline{HE}^2$; Q. E. D.

COROLLARIUM I.

153. Ex omnibus triangulis iſoſcelis producta, quae oriuntur multiplicando baſium quadrata per altitudines, aequalia habentibus; illud, cujus baſis duplum poteſt altitudinis, *minimum* poſſidet productum baſeos per crurum aggregatum, ſeu baſeos dimidiae per crus alterutrum multiplicatae.

COROLLARIUM II.

154. Demiſſis ex punctis G, H in latera AB, DE normalia

malibus GM, HN, erit $AG.GB = AB.GM$, $DH.HE = DE.HN$, quare $AG.\overline{GB}^2 : DH.\overline{HE}^2 = AB.BG.GM : DE.EH.HN$; ſed (*per hyp.*) $AB.BG = DE.EH$; ergo $AG.\overline{GB}^2 : DH.\overline{HE}^2 = GM.HN$. Eſt autem $AG.\overline{GB}^2 > DH.\overline{HE}^2$, ergo $GM > HN$; hoc eſt ſi ex angulis rectis triangulorum omnium rectangulorum, in quibus producta ex hypothenuſis in baſes ſint aequalia, demittantur normales ſuper ipſas hypothenuſas, normalis in illo triangulo, cujus altitudo baſeos duplum poteſt, erit *maxima*, adeoque *maximus* quadrans circularis ipſi triangulo inſcribetur. Et viciſſim ſi normales ex quorumcumque triangulorum rectangulorum angulis rectis ſuper hypothenuſas demiſſae ſint aequales, triangulum illud, cujus altitudo baſeos duplum poteſt, *minimum* habebit productum ex hypothenuſa in dictam baſim.

THEOREMA XVII.

155. *Inter omnia triangula aeque alta circulo circumſcripta, iſoſceles cum area, tum perimetro* minima *afficitur.*

Dem. Circulo MN (*Fig.* 81.) circumſcribantur triangulum iſoſceles ABC, & aliud quodvis aeque altum DEF, ductaque BH parallela, & aequali lateri ED, jungatur HC. Quoniam triangula ABC, HBC in eadem baſi, & inter eaſdem parallelas conſtituuntur, iſoſceles ABC minori cingitur perimetro quam HBC (1.), ac proinde circulus triangulo HBC inſcriptus minor erit circulo MN. Ergo ſi ſtante latere BH, latera HC, HB, & BC tangere debeant (ſervata figura triangulari) circulum circulo MN aequalem, oportet, ut fixa manente extremitate H, latus HC ab HB magis recedat, & evadat HI lateri DF aequale, ac parallelum; ſed tunc, ob triangula DEF, HBI aequalia, & ſimilia, fit BI, ſeu $EF > BC$, ergo triang. $ABC < DEF$; *quod erat primum.*

Secundum patet etiam ex eo quod quum triangulum ABC perimetrum habeat minorem triangulo HBC, potiori jure *minorem* perimetrum habere debet triangulo HBI, ſeu DEF.

Corollarium

156. Inter omnes circulos triangulis tam aequalibus, quam iſoperimetris, utriſque aeque altis, inſcriptos, ille qui triangulo iſoſcelio inſcribitur, eſt *maximus*.

Theorema XVIII.

157. *Ex triangulis omnibus, quae circulo circumſcribi poſſint, aequilaterum minima area, minimaque praeditum eſt perimetro.*

Dem. Eſto ABC (*Fig.* 82.) dimidium trianguli aequilateri, DEC dimidium trianguli iſoſcelis, utrumque circulo LC circa eandem altitudinem AC circumſcriptum, ac vertex D ſtatuatur infra verticem A. Ducta BM parallela ipſi AC, quoniam latus AB tangit circulum in ſui dimidio K, & latus DE eum tangit ultra *K* in L, rectarum AB, DE interſectio I erit ultra punctum K, quare quum ſit AI < IB, adeoque DI < IM, triangulum ADI minus erit ſimili BMI, ac minus potiori jure triangulo *B*IE, poſitoque communi trapezio DI*B*C, erit triangulum ABC < CDE. Eodem modo, ducta AN parallela baſi *B*H, oſtenderur, triangulum aequilaterum AHC minus eſſe triangulo iſoſcele GFC, cujus vertex G ſit ultra verticem A. Sed triangula DEC, GFC ſunt ſingula minora ceteris triangulis ſub iiſdem altitudinibus circulo circumſcriptis (155.); ergo *patet primum*.

In ejuſmodi autem triangulis perimetri ſunt ut areae; ergo *patet ſecundum*.

Corollarium

158. Igitur inter omnia triangula, quorum areae ſunt ut perimetri, aequilaterum cum aream, tum perimetrum *minimam* habet.

THEO-

T H E O R E M A XIX.

159. *Ex omnibus triangulis aeque altis ſegmento circulari circumſcriptis, iſoſceles* minimam *cum aream, tum perimetrum habet.*

Dem. Segmento circulari PMT (*Fig.* 83.) ſub eadem altitudine AR, ſive DS circumſcripta concipiantur triangula *ABC*, DEF, quorum prius *ABC* ſit iſoſceles. Per hujus trianguli *ABC* contactus G, I traducatur recta GI uſque ad occurſum laterum DE, DF trianguli DEF in punctis L, K. Quoniam lateris DE contactus eſt ſupra punctum G, & lateris alterius DF contactus eſt infra punctum I, erit GI < LK. Jam vero quum *LK* ſit parallela EC, ſtabit GI : *BC* = AN · AR = DI : DS = LK : EF, quare permutando, GI : LK = *BC* : EF, ſed GI < LK; ergo *BC* < EF, adeoque triang. *ABC* < DEF; *quod erat primum.*

Si trianguli DEF foret baſis EF = *BC*, triangulum *ABC* minorem ipſo haberet perimetrum (1.), ergo potiori iure minorem habebit perimetrum quam DEF, ſi hujus baſis EF > *BC*; *quod erat ſecundum.*

T H E O R E M A XVIII.

160. *Ex triangulis omnibus, quae ſegmento cuilibet circulari circumſcribi poſſunt, iſoſceles illud, cujus crura dictum ſegmentum ſuis dimidiis tangunt, eſt* minimum.

Dem. Segmento circulari PMT (*Fig* 84.) ſint circumſcripta triangula iſoſcelia *ABC*, DEC, GIC (dimidia pro integris expono), & trianguli integri *AB*H crura *AB*, AH ſegmenti circumferentiam tangant ſuis dimidiis K, L. Eadem methodo qua paulo ante uſi fuimus (153.), demonſtrabitur, triangulum A*BC* minus eſſe ſingulis triangulis DEC, GIC. Sed ex omnibus triangulis aeque altis ſegmento circulari circumſcriptis iſoſceles eſt minimum (159.); ergo &c.

Corollarium I.

161. Ex omnibus triangulis, quae ſemicirculo circumſcribi poſſunt, rectangulum eſt *minimum*, adeoque inter omnia parallelogramma circulo circumſcripta quadratum eſt *minimum*.

Corollarium II.

162. Ex omnibus parallelogrammis, quae duobus circuli ſegmentis aequalibus eandem chordam communem habentibus circumſcribi poſſunt, rhombus ille, cujus latera circumferentias ſuis dimidiis tangunt, eſt *minimus*.

L E M M A.

163. *Sint triangula iſoſcelia aequalia* ABD, FGI (Fig. 85. 86.) *circa communem altitudinem* AC, *quorum* ABD *ſit aequilaterum; ſecta AB biſariam in* E, *dico, latus alterum* GF *trianguli* FGI *ſecare AB infra punctum* E, *ſi* F *ſit citra punctum* A, *ut in* Fig. 85. *& ſupra, ſi* F *ſit ultra A, ut in* Fig. 86.

Dem. Si negas; crus GF tranſeat per E dimidium cruris *AB*, & ex puncto A ducatur AH parallela *BD* occurrens in H cruri GF. Triangula ſimilia GE*B*, AEH erunt etiam aequalia; ſed triangula quoque *ABC*, FGC ſunt (*ex hyp.*) aequalia; ergo ablato communi trapetio FEBC in *Fig.* 85, & AEGC in Fig. 86, triangulum GE*B* erit aequale triangulo AFE; ſed triang. GE*B* = AEH (*per dem.*), ergo triang. AFE = AEH, quod eſt abſurdum.

Idem, ceteris ſtantibus, facilius demonſtrabitur, ſi crus GF tranſeat ſupra punctum E in *Fig.* 85. & infra in *Fig.* 86. ut eſt perſpicuum; ergo &c.

T H E O R E M A XIX.

164 *Inter omnes circulos triangulis univerſis aequalibus inſcriptos; ille, qui triangulo aequilatera inſcribitur, eſt* maximus. Dem.

Dem. ſint duo triangula iſoſcelia aequalia *A*BD, FGI (*Fig.* 87. 88.), quorum alterum *A*BD ſit aequilaterum, utraque vero circa communem altitudinem *A*C conſtituta, utis figuris, iiſque inſcripti concipiantur circuli CEK, CMN, quorum centra, H, L in communi altitudine *A*C, & contactuum puncta, E, *K*, M, N. Quoniam crura FG, FI ſecant alia crura *A*B, *A*D infra eorum dimidia E, K ſive infra circuli CE*K* contactus, ut in *Fig.* 87. & ſupra, ut in *Fig.* 88. (163.), puncta M, N erunt neceſſario intra triangulum ABD; quare circulus per puncta M, C, N tranſiens circuló per puncta C, E, *K* tranſeunte continebitur, adeoque illo *minor* erit, & ita ſemper. Sed ſi unicuique triangulo iſoſceli triangulum quodvis ſcalenum aequale ſub eadem altitudine conſtruatur, circulus triangulo iſoſceli inſcriptus erit maximus (156.), ergo &c.

Corollarium I.

165. Ex hoc Theoremate, quae jam demonſtravimus (9. 42.) confirmantur, nam ob aequalia triangula A*B*D, FGI, erit radius LC ad radium HC, ut trianguli ABD perimeter ad perimetrum trianguli FGI. Sed LC < HC, & hoc ſemper, ergo trianguli aequilateri perimeter erit ſemper ***minor*** perimetro cujuslibet trianguli ipſi aequalis, &c.

Corollarium II.

166. Itidem quum inter omnia triangula iſoperimetra aequilaterum ſit maximum (165.); ſequitur, inter omnes circulos triangulis univerſis iſoperimetris inſcriptos, illum, qui triangulo aequilatero inſcribitur, eſſe ***maximum*** (156.).

Theorema XX.

167. *Ex univerſis triangulis aequalibus, aequilaterum minimo efficitur producto, quod oritur tria ſingulorum hujuſmodi triangulorum latera inter ſe multiplicando.*

 Dem.

Dem. Triangulis iſoſcelis aequalibus *ABC*, DEF (*Fig.* 79. 80.), quorum *ABC* aequilaterum, circuli *ABIC*, DELF circumſcribantur. Actis diametris *AI*, DL, ex natura circuli ſtabit *AB*. *AC*. *BC* : DE . DF . EF = *AI*. *AG*. *BC* : DL . DH . EF; ſed (*per hyp.*) *AG*. *BC* = DH . EF, ergo *AB*. *AC*. *BC* : DE . DF . EF = *AI* : DL; ſed *AI* eſt minima omnium DL (146.); ergo productum *AB*. *AC*. *BC* eſt omnium productorum DE . DF . EF *minimum*. Jam vero ſi ſupra trianguli iſoſcelis DEF baſim EF conſtituatur aliud triangulum ipſi aequale, majorem hoc habebit perimetrum (7), ergo &c.

Corollarium I.

168. Ex omnibus triangulis, in quibus facta, quae prodeunt tria ſingulorum latera inter ſe multiplicando, ſunt invicem aequalia, aequilaterum eſt *maximum*; quod etiam directe oſtendi poteſt; ſi enim triangulis *ABC*, DEF circuli *ABIC*, DELF circumſcribantur, quia (*per hyp.*) AI . *AG*. *BC* = DL . DH . EF, ſtabit *AG*. *BC* : DH . EF = DL : *AI*, at ſemper eſt DL > *AI* (146.); ergo &c.

Corollarium II.

169. Ex omnibus triangulis circulo circumſcriptis, aequilaterum *minimum* habet productum, quod fit tria ſinguli cujuſcumque latera invicem multiplicando; ſi enim cùm omnia triangula ſunt aequalia id accidit, idem multo magis accidere debet cùm triangulum aequilaterum eſt, ut vidimus (157.), ceterorum minimum. Et viciſſim inter omnes circulos inſcriptos triangulis aequalia habentibus producta, quae ex tribus ſingulorum lateribus invicem multiplicatis oriuntur; ille, qui triangulo aequilatero inſcribitur, eſt *maximus*.

Theorema XXI.

170. *Ex univerſis triangulis iſoperimetris, aequilate-*

rum

rum maximo *pollet producto, quod oritur tria ſingulorum hujuſmodi triangulorum latera invicem multiplicando.*

Dem. ſi triangulorum hujuſmodi ſingulorum perimetri in totidem rectas diſponantur, omnes iſtae rectae (*per. hyp.*) aequales erunt. Sed in trianguli aequilateri perimetro ſubquadruplum facti ex quadrato duplae portionis in reliquam eſt ſemper maximum (143. 32.); ergo &c.

COROLLARIUM.

171. Viciſſim inter omnia triangula, in quibus producta ex tribus ſingulorum lateribus invicem multiplicatis aequantur, aequilaterum *minima* praeditum eſt perimetro.

LEMMA.

172. *Si triangula iſoſcelia* EBK, GHL (Fig. 89. 90.) *circulo, cujus centrum* C, *circumſcribantur, dico, eſſe* $\overline{AB}^2 . AE : \overline{AH}^2 . AG = \overline{AE}^2 . FG : \overline{AG}^2 . FE$.

Dem. ſuper crura *EB*, GH demittantur normales CD; CI. Ob triangula ſimilia *ABE*, CDE ſtabit AB : CD = AE: ED, pariterque $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 : AE . EF$; ergo $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = AE . EF$. Eadem plane ratione ex triangulis ſimilibus AHG, GIG colligitur $\overline{AH}^2 : \overline{GI}^2 = AG : GF$, & invertendo, $\overline{CI}^2$, ſeu $\overline{CD}^2 : \overline{AH}^2 = GF : AG$. Itaque ſi duae repertae analogiae $\overline{CD}^2 : \overline{AH}^2 = GF : AG$, $\overline{AB}^2 : \overline{GD}^2 = AE :$ EF invicem multiplicentur, prodibit $\overline{AB}^2 : \overline{AH}^2 = AE . GF : EF . AG$, ductiſque antecedentibus rationum in eandem altitudinem AE, & conſequentibus in eandem altitudinem AG, orietur $\overline{AB}^2 . AE : \overline{AH}^2 . AG = \overline{AE}^2 . GF \cdot \overline{AG}^2 . EF$, Q. E. D.

THE-

THEOREMA XXII.

173. *Inter univerſa triangula circulo circumſcripta, illud cujus altitudo duplam circuli inſcripti diametrum adaequat*, minimum *habet productum ex baſeos quadrato in altitudinem*.

Dem. Stantibus iiſdem, quae in Lemmatis antecedentis (172.) figuris, ſit primum $AG < AE$ (*Fig.* 90.). Quoniam $EF = FA$, erit $EF : FA < FA . FG$; & componendo, $EA : AF < AG : GF$, permutando, $EA : AG < AF : FG$. Sumpta igitur $AM = AG$, erit componendo, $ME : AG < AG . GF$; quare $ME . GF < \overline{AG}^2$; hinc $ME . GF . EG < \overline{AG}^2 . EG$; ex quo $ME . EG : \overline{AG}^2 < EG : GF$; & componendo, $\overline{AE}^2 : \overline{AG}^2 < EF : GF$, adeoque $\overline{AE}^2 . GF < \overline{AG}^2 . EF$. Sed per Lemma antecedens (172.) eſt $\overline{AB}^2 . AE : \overline{AH}^2 . AG = \overline{AE}^2 . GF : \overline{AG}^2 . FE$; ergo $\overline{AB}^2 . AE < \overline{AH}^2 . AG$, ſeu $\overline{BK}^2 . AE < \overline{HL}^2 . AG$. Triangulum autem iſoſceles EBK minorem habet baſim quam aliud quodvis triangulum aeque altum eidem circulo circumſcriptum (155.); ergo *patet primum*.

Sit ſecundo $AG > AE$ (*Fig.* 89.). Ob $EF = FA$, erit $AG : AE > AF : FE$. Sume $AM = AE$, fiet componendo, $MG : AE > AE : FE$, ac proinde $MG . FE > \overline{AE}^2$, ſive $MG . FE . GE > \overline{AE}^2 . GE$, unde $MG . GE : \overline{AE}^2 > GE : FE$; & componendo, $\overline{AG}^2 : \overline{AE}^2 > GF : EF$; hinc $\overline{AG}^2 . EF > \overline{AE}^2 . GF$. Sed vi Lemmatis $\overline{AG}^2 . EF : \overline{AE}^2 . GF = \overline{AH}^2 . AG : \overline{AB}^2 . AE$; ergo $\overline{AB}^2 . AE < \overline{AH}^2 . AG$, ſeu $\overline{BK}^2 . AE < \overline{HL}^2 . AG$.

AG. *At* id de quibuſvis etiam triangulis aeque altis eidem circulo circumſcriptis ſit verum; ergo *patet ſecundum*.

Corollarium I.

174. Quum ſit $EF = FA$, ſi ponatur $FC = CD = 1$, erit $EC = 3$, $\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{CD}^2 = 9$; ſed $\overline{CD}^2 = 1$, ergo $\overline{ED}^2 = 8$, nempe $\overline{ED}^2 : \overline{CD}^2 = 8 : 1$. At $ED : CD = EA : AB$, itidemque $\overline{ED}^2 . \overline{CD}^2 = \overline{EA}^2 : \overline{AB}^2$, ergo $\overline{EA}^2 : \overline{AB}^2 = 8 : 1$, & $\overline{EA}^2 : \overline{BK}^2 = 8 : 4 = 2 : 1$; videlicet inter omnia triangula, quae circulo circumſcribi poſſunt, illud, cujus altitudo baſeos duplum poteſt, *minimum* habet productum ex baſeos quadrato in altitudinem.

Corollarium II.

175. Triangulorum circulo circumſcriptorum areae ſunt perimetris proportionales; quare inter univerſa triangula, quorum areae ſunt ut perimetri, illud, cujus altitudo baſeos duplum poteſt, *minimum* habet productum ex baſeos quadrato in altitudinem, vel ex baſi in totam perimetrum.

Corollarium III.

176. Viciſſim inter univerſa triangula, quibus invicem aequantur producta ex baſium quadratis in altitudines, vel ex baſibus in totas perimetros, illud, cujus altitudo baſeos duplum poteſt, *maximum* circulum inſcriptum habet; & circulus iſte praedicto eſt diametro ſubduplo altitudinis dicti trianguli, cui inſcribitur.

THEO-

THEOREMA XXIII.

177. *Figurarum omnium rectilinearum ejuſdem generis circulo inſcriptarum illa* maximam *cum aream, tum perimetrum habet, quae eſt aequilatera*, & *aequiangula.*

Dem. Finge, figurarum omnium rectilinearum, de quibus eſt quaeſtio, circulo ABD (*Fig.* 91.) inſcriptarum maximam eſſe ABCDE, maximamque habere perimetrum, dico, hanc eſſe aequilateram, & aequiangulam. Si enim id neges, ſit maxima alia figura BCDEF, cujus latera ſaltem duo FB, FE ſint inaequalia; junctaque BE, conſtruitur ſuper hac triangulum iſoſceles ABE. Quum triangulum iſtud majorem triangulo FBE (128.) habeat cum aream, tum perimetrum, figura BCDEF non eſt illa, quae aſſerebatur, & ita ſemper, donec figura propoſita evadat aequilatera. Sed figura aequilatera circulo inſcripta eſt quoque neceſſario aequiangula; ergo &c.

COROLLARIUM

178. Inter omnes circulos figuris omnibus rectilineis ejuſdem generis tam aequalibus, quam iſoperimetris circumſcriptos, ille, qui figurae aequilaterae, & aequiangulae circumſcribitur, eſt *minimus.*

THEOREMA XXIV.

179. *Inter omnes circulos figuris omnibus rectilineis ejuſdem generis aequalibus inſcriptos, ille, qui figurae aequilaterae, & aequiangulae inſcribitur, eſt* maximus.

Dem. Quoniam figurae rectilineae ejuſdem generis ponuntur aequales, producta, quae fiunt multiplicando circuli inſcripti radium in talium figurarum ſemiperimetrum circumſcriptam, ſunt aequalia. Ergo ut unius figurae perimeter ad perimetrum alterius figurae ejuſdem generis, ita erit radius circuli huic ſecundae inſcripti ad radium cir-

circuli primae pariter inſcripti. Sed ſi prima figura ſit aequilatera, & aequiangula, minimam habebit perimetrum (64.), ergo quum radii circulorum inſcriptorum ſint perimetris figurarum, quibus inſcribuntur, reciproci, figura aequilatera ſimul, & aequiangula maximum habebit hujuſmodi radium, adeoque circulus ipſi inſcriptus erit reliquorum circulorum figuris ejuſdem generis non aequilateris, & non aequiangulis inſcriptorum *maximus.* Q. E. D.

THEOREMA XXV.

180. *Inter omnes circulos figuris omnibus rectilineis ejuſdem generis iſoperimetris inſcriptos, ille, qui figurae aequilaterae, & aequiangulae inſcribitur, eſt* maximus.

Dem. Quum perimetri ponantur aequales, figurae ejuſdem generis, de quibus eſt quaeſtio, erunt ut radij circulorum iis inſcriptorum; ſed ex univerſis figuris rectilineis ejuſdem generis iſoperimetris aequilatera, & aequiangula eſt maxima (63.); ergo radius circuli figurae hujuſmodi aequilaterae, & aequiangulae inſcripti erit maximus, ac proinde etiam circulus ipſe. Q. E. D.

COROLLARIUM

181. Ergo ex omnibus figuris rectilineis ejuſdem generis, quae circulo circumſcribi poſſunt, aequilatera, & aequiangula eſt *minima* (179.) & *minima* cingitur perimetro (180.)

THEOREMA XXVI.

182. *Inter omnes circulos univerſis figuris rectilineis regularibus tam aequalibus, quam iſoperimetris inſcriptos, ille, qui triangulo inſcribitur, eſt* minimus.

Dem.

Dem. Sint triangulum aequilaterum *ABC* (*Fig.* 57.58.), & polygonum quodvis regulare DEF ipſi aequale, iiſque inſcripti concipiantur circuli. Quoniam omnes ejuſmodi figurae ponuntur aequales, radii circulorum iis inſcriptorum per earum perimetros multiplicati producta aequalia efficient; ergo radij erunt perimetris iſtis reciproci. Sed inter omnes recenſitas figuras triangulum aequilaterum maximam habet perimetrum (108.); ergo radius circuli eidem inſcripti, adeoque ipſe circulus erit *minimus*; *quod erat primum*.

Eſto polygonum quodlibet regulare DEF triangulo aequilatero ABC iſoperimetrum, iiſque inſcripti ponantur circuli. Triangulum ABC erit ad polygonum DEF, ut circuli triangulo inſcripti radius ad radium circuli polygono inſcripti. Sed ex univerſis figuris rectilineis regularibus iſoperimetris triangulum eſt minimum (106.); ergo circuli triangulo ABC inſcripti radius, adeoque circulus ipſe erit *minimus*, *quod erat ſecundum*.

Corollarium.

183. Si triangulo ablato, idem iteretur ratiocinium, quadrato minimus circulus continebitur, & ſic deinceps; quamobrem inter omnes circulos figuris rectilineis regularibus tam aequalibus, quam iſoperimetris inſcriptos, ille qui figurae minori angulorum, vel laterum numero affectae inſcribitur, eſt reliquis *minor*.

Theorema XXVII.

184. *Ex univerſis figuris rectilineis regularibus circulo circumſcriptis, triangulum maxima cum area, tum perimetro pollet.*

Dem. Eſto triangulum aequilaterum ABD (*Fig.* 87.) circulo ECK circumſcriptum. Sumpto in circumferentia inter contactus E, K quovis puncto O, per ipſum ducatur tangens LP cruribus AB, AD utrinque terminata. Quadrilaterum BLPD minus erit triangulo ABD, minorem

remque habebit perimetrum, ut apertum eſt. Per aliam tangentem commutetur quadrilaterum BLPD in figuram quinque lateribus inſtructam, haec minori tam area, quam perimetro prae dicto quadrilatero donabitur, & ita porro. Sed ex omnibus figuris rectilineis ejuſdem generis, quae circulo circumſcribi poſſunt, aequilatera, & aequiangula eſt minima, minimaque cingitur perimetro (181.); ergo potiori jure figura quaecumque ex regularibus, de quibus eſt quaeſtio, *minorem* triangulo aequilatero cum area, tum perimetrum poſſidebit. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

185. Ergo ex omnibus figuris rectilineis regularibus circulo circumſcriptis, illa, quae minori angulorum, vel laterum numero conſtat, reliquis *majorem* habebit cum aream, tum perimetrum.

T H E O R E M A   XXVIII.

186. *Ex univerſis figuris rectilineis regularibus circulo inſcriptis, triangulum eſt* minimum, *ac* minimam *habet perimetrum*.

Dem. Circulo ABDE (*Fig.* 92.) inſcriptum eſto triangulum aequilaterum ABC, acceptoque infra baſim BC in circumferentia BDC puncto quovis D, junge BD, CD. Patet, figuram quadrilateram ABDC eſſe triangulo ABC majorem, ac majori perimetro circumdari. Ultra crus alterum AC ſume in circumferentia AEC punctum aliquod E, & junge AE, CE. Figura ABDCE quinque lateribus conſtans tam area, quam perimetro quadrilaterum ABDC ſuperabit, & ita ſemper. Sed ex omnibus figuris rectilineis ejuſdem generis circulo inſcriptis, aequilatera, & aequiangula eſt maxima, maximamque habet perimetrum (177.) ergo potiori jure figura quaecumque regularis circulo inſcripta *major* tam area, quam perimetro ſemper erit triangulo aequilatero ibi pariter inſcripto. Q. E. D.

Co-

Corollarium I.

187. Ex omnibus ergo ſiguris rectilineis regularibus circulo inſcriptis; illa, quae minori laterum, vel angulorum numero conſtat, reliquis erit *minor*, ac *minori* perimetro claudetur.

Corollarium II.

188. Inter omnes circulos figuris univerſis rectilineis regularibus, quarum areae, vel perimetri ſunt aequales, circumſcriptos, ille, qui triangulo circumſcribitur, eſt *maximus*.

THEOREMA XXIX.

189. *Si data ſint latera* AB, BC, CD, DE (Fig. 93.) *quae in extremitatibus connexa angulos quoſvis* ABC, BCD, CDE *exterius prominentes ita conficiant, ut punctis extremis & liberis* A, E *junctis per* AE *ſpatium claudentem, polygonum* ABCDE *oriatur; ajo, inter hujuſmodi polygona illud eſſe* maximum, *per cujus puncta* A, B, C, D, E *tranſit ſemicirculus*.

Dem. Si negas; ab extremitatibus A, E lateris AE ſpatium claudentis age ad omnes recenſitos angulos rectas AC, AD, EB, EC novos angulos ABE, ACE, ADE efficientes. Quoniam per puncta A, B, C, D non tranſit ſemicirculus, aliquis ex angulis noviſſime nominatis non erit rectus. Talis ex. gr. non ſit angulus ACE. Rectas FH = AC (*Fig.* 94.), & HK = CE ad angulum rectum FHK inclino, deinde ſuper iiſdem conſtruo figuras FGH, HIK aequales, & ſimiles figuris ABC, CDE. Liquet, polygonum FGHIK majus eſſe poligono ABCDE propter triangulum FHK > ACE (39.), & ita ſemper, donec unusquisque ex omnibus angulis ABE, ACE, ADE rectus evadit. Sed tunc ſemicirculus per puncta A, B, C, D, E neceſſariò tranſire debet, ergo &c:

Co-

COROLLARIUM

190. Quomodocumque chordas eaſdem, quamvis inter ſe inaequales, in ſemicirculo diſponere lubeat, perſpicuum eſt, inſcripti polygoni aream eamdem permanere, ubicumque enim eadem chorda circulo applicetur, aequalem ſemper portionem circularem abſcindet; quare polygonum ſemicirculo inſcriptum *majus* ſemper erit quam aliud quodvis polygonum ſemicirculo non inſcriptibile lateribus iiſdem, diametro excepto, conſtatum, & latere aliquo indeterminato clauſum, quicumque ſit ordo, quo iſtiuſmodi latera diſponantur.

THEOREMA XXX.

191. *Polygonum circulo inſcriptum eſt omnium polygonorum latera ipſi aequalia habentium, ſed circulo non inſcriptibilium* maximum.

Dem. Sint polygonum ABCDEFA (*Fig.* 95. 96.) circulo inſcriptum, & aliud polygonum GHILMNG ipſi aequilaterum, ſed circulo non inſcriptibile. Ducta diametro *A*P, junge DP, EP; tum ſupra ML = ED conſtituto triangulo MQL ſimili, & aequali triangulo EPD, junge GQ. Quoniam contingere poteſt, ut polygoni GHILQMNG pars altera tantum (puta GHILQG) ſit ſemicirculo ABDP inſcriptibilis, vel neutra; in primo caſu pars altera (ex. gr. GQMNG) eidem circulo non erit (*per hyp.*) inſcriptibilis, adeoque polygono *A*PEFA minor (189.). In altero caſu pars GQLIHG erit minor polygono *A*BCDP*A*, & pars GQMNG minor polygono *A*PEF*A* (*l. cit.*); ergo totum polygonum *A*BCDPEF*A* majus erit toto polygono GHILQMNG. Aufer utrinque triangula aequalia DPE, LQM; remanebit polygonum *A*BCDEF*A* **majus** polygono GHILMNG Q. E. D.

Corollarium

192. Si latera EP, PD ſint reliquis lateribus ſingulis ſingulis aequalia, polygonum ABCDPEF circulo incluſum erit aequilaterum, & aequiangulum, adeoque *majus* aequilatero quovis non aequiangulo ejuſdem generis GHILQMN.

THEOREMA XXXI.

193. *Si circuli circumferentia ſit per puncta quotlibet* A, B, D, E, F, G, H, I (Fig. 97.) *ſecta in partes aequales, atque tam cum centro* C, *quam cum quovis alio puncto* P *ubicumque ſumpto hujuſmodi puncta connectantur; dico, rectarum* CA, CB, CD, CE, CF, CG, CH, CI *aggregatum prae quovis alio rectarum* PA, PB, PD, PE, PF, PG, PH, PI, *aggregato eſſe* minimum.

Dem. Junctis enim AB, BD, DE, EF, FG, GH, HI, IA, fit polygonum regulare; quamobrem ex dictis (67.) res patet.

Corollarium I.

194. Ergo ſi circuli circumferentia in portiones aequales ſummè exiguas reſoluta concipiatur, ac poſtmodum ex centro C, & ex alio quovis puncto P ad ejuſmodi laterculorum extremitates ponamus, rectas omnes ductas eſſe, aggregatum innumerarum rectarum, quod fit a radijs, ſemper erit *minimum*.

Corollarium II.

195. Quod de hujuſmodi rectarum aggregatis monuimus (193. 194.), de quadratorum ſuper eaſdem rectas conſtructorum aggregatis ſentiendum eſt (101).

THEOREMA XXXII.

196. *Univerſarum figurarum rectilinearum cum regularium,*

larium, tum irregularium iſoperimetrarum maxima, *ſeu capaciſſima eſt circulus*.

Dem. Circulus eſt polygonum regulare innumeris ſumme exiguis conſtans laterculis, ergo quaecumque figura ſtatuitur iiſdem circuli lateribus conflata, dummodo non ſit alter circulus, circulus erit ipſa ſemper *major* (191.). Si fingimus, polygonum quodvis regulare, vel irregulare circulo iſoperimetrum, ſed minori laterculorum numero cinctum, circulus erit illo ſemper *major* (107). Si polygonum concipiatur circulo iſoperimetrum aequali cum ipſo laterum numero abundans, ſed inaequalibus laterculis concinnarum, circulus erit illo ſemper *major* (63.). Si quis ſuſpicetur, circuli laterculis in portiones minores aequales abeuntibus, exurgere poſſe novum polygonum aequilaterum & aequiangulum, quod idcirco ſit majus circulo, ex quo prodit (107.), perpendat, polygonum iſtud eſſe neceſſario alium circulum, quapropter duo darentur circuli aequalem habentes perimetrum, quorum alter altero major eſſet, quod eſt abſurdum. Tandem ſi quis imaginetur polygonum regulare, vel irregulare circuli peripheriae iſoperimetrum, ſed angulis nunc exterius, nunc interius prominentibus conſtructum, manifeſtum eſt, polygonum iſtud alio polygono iſoperimetro angulis omnibus exterius prominentibus (ut hujuſmodi figurae fermè conſiderantur) praeditum minus eſſe, adeoque potiori jure *minus* circulo iſoperimetro. Ergo univerſim patet *Theorema*.

C o r o l l a r i u m

197. Viciſſim inter univerſas figuras rectilineas cum regulares, tum irregulares aequales, circulus *minima* perimetro circumdatur.

S c h o l i u m

198. Quum figura quaevis curvilinea ſit & ipſa inſtar circuli polygonum exiliſſimis, ſed inaequalibus conſtans laterculis, addere potuiſſem, non dari figuram etiam

F 2 cur-

curvilineam, vel mixtilineam circulo iſoperimetram, qua circulus non ſit *major*, & viciſſim non dari perimetrum etiam figurae curvilineae, aut mixtilineae circulo aequalis, qua circuli peripheria non ſit *minor*; At ad Euclidis Geometrarum facile principis exemplum, non erat a figuris rectilineis, & circulo in re conſimili recedendum.

THEOREMA XXXII.

199. *Segmentorum circularium aequalibus circumferentiae portionibus praeditorum* maximum *eſt ſemicirculus.*

Dem. Sint duo ſegmenta circularia *ABCA*, DEFD (*Fig.* 98. 99), in quibus circumferentiae portiones *ABC*, DEF aequentur, ſitque *ABCA* ſemicirculus. Supra chordam DF concipe conſtitutum aliud ſegmentum DIFD aequale, ac ſimile ſegmento DEFD, compleaturque circulus *ABCH*. Liquet, circulum integrum, cujus ſegmentum DEFD, eſſe majorem circulo *ABCH*, adeoque latercula, quibus circumferentia DEF coaleſcit, eſſe majora laterculis, quibus conſtat circumferentia circuli *ABCH*, ſunt enim circulorum latercula in ratione directa radiorum, ut in circulis concentricis oſtendere facile eſt. Numerus igitur laterculorum in figura DEFI erit minor numero laterculorum in circulo *ABCH*, quare circulus *ABCH* erit major figura DEFI (187.). Ergo ejus quoque dimidium, ſemicirculus nempe *ABC*, erit *major* dimidio figurae DEFI, hoc eſt ſegmento DEFD. Q. E. D.

COROLLARIUM

200. Viciſſim ex omnibus ſegmentis circularibus aequalibus, *minima* ſemicirculus afficitur circumferentia.

DE

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATIS

PARS SECUNDA

LIBER III.

De Solidis.

LEMMA

201. *Super eadem baſi regulari BF* (Fig. 100) *pari laterum numero praedita, ſint priſmata aeque alta AC, CI, quorum AC rectum, dico, ex parallelogrammis, queis priſmatis obliqui CI ſuperficies conſtat, alterutrum rectangulorum oppoſitorum aequalium BHIK, CFLG eſſe maximum; parallelogrammum BKGC in eodem plano cum rectangulo BCDE jacens eſſe minimum; ac cetera parallelogramma intermedia quo plus a rectangulo BHIK, vel CFLG recedunt, & ad parallelogrammum BKGC accedunt, gradatim imminui.*

Dem. Rectangulum CFLG, & ſubſequentia parallelogramma uſque ad BKGC ſeparata repraeſentet *Fig.* 101. in qua rectanguli CL baſis CM producatur in P. Quoniam parallelogrammi obliqui ſtatim ſubſequentis MN baſis MB a directione CM parallelogrammum BG verſus abſcedit, erit angulus LMB major angulo LMP, adeoque obtuſus, ac proinde angulus MBN erit acutus. Pari ratione angulus NBO, quem efficit longitudo BN paral-

 lelo-

lelogrammi proxime ſubſequentis BG cum ejus baſi BO, erit major angulo LMB, ut ex MB protracta in Q facile apparet, quamobrem angulus BOG minor erit angulo MBN, latitudo igitur parallelogrammi MN minor erit latitudine rectanguli CL, & latitudo parallelogrammi BG minor latitudine parallelogrammi MN. Sed hujuſmodi parallelogramma habent (*ex hyp.*) baſes, & longitudines aequales, ergo parallelogrammum MN minus erit rectangulo CL, & parallelogrammum BG minus parallelogrammo MN, idque ſi plura parallelogramma inter rectangulum CL, & parallelogrammum BG intercedant. Q. E. D.

Corollarium

202. Si priſmatis regularis *AC* (*Fig.* 100.) baſis BF non conſtet pari laterum numero, ſemper verum reperietur, ſingula parallelogramma priſmatis obliqui CI ſuperficiem efficientia eſſe majora parallelogrammo B*K*GC, quod in eodem cum rectangulo BCDE jacet plano, quam conditionem ſemper adeſſe debere pono, cum de hujuſmodi priſmatis loquor.

Theorema I.

203. *Ex omnibus parallelepipedis, & priſmatis regularibus eandem baſim, & altitudinem habentibus, rectum* minima *obducitur ſuperficie*.

Dem. Sint parallelepipeda, vel priſmata *AC*, CI (*Fig.* 100.) aeque alta, in eadem baſi BF ita conſtituta, ut parallelogrammum BKGC jaceat in eodem plano cum rectangulo BCDE; erit parallelogrammum BKGC aequale rectangulo BCDE; ſed cetera parallelogramma parallelepipedi, vel priſmatis obliqui CI ſuperficiem componentia ſunt ſingula majora parallelogrammo BKGC (201. 201.); ergo &c.

Corollarium I.

204. Quum cylindri ſint priſmata regularia (195.), inter

ter omnes cylindros eadem baſi, & altitudine praeditos, *minima* rectus afficitur ſuperficie.

Corollarium II.

205. Quoniam parallelogramma obliqua in parallelepipedo, vel priſmate pariter obliquo ſunt rectangulis reſpondentibus in parallelepipedo, vel priſmate regulari eandem baſim & altitudinem habenti ſemper majora, excepto parallelogrammo illo obliquo, quod jacet in eodem plano cum aequali rectangulo parallelepipedi, vel priſmatis recti (201. 202.); cujuſcumque priſmatis recti ſuperficies *minor* erit ſuperficie priſmatis obliqui ſub eadem baſi, & altitudine; quod patet, ſi ex planis, quibus terminantur priſmata diverſa aeque alta tam recta, quam obliqua, & bina in eadem baſi regulari conſtituta, alia duo priſmata, alterum rectum irregulare, obliquum alterum, ſub aequali baſi & altitudine, rite concinnentur; quapropter

Corollarium III.

206. Quomodocumque planum unum vel plura per integram longitudinem cylindri recti traducta illum dividant, portiones iſtae cylindricae reſectae *minimam* comparate ad alias portiones cylindricas obliquas in eadem baſi & altitudine conſtitutas, & modo conſimili reſectas habebunt ſuperficiem.

THEOREMA II.

207. *Ex omnibus parallelepipedis, priſmatis, & cylindris baſi eidem inſiſtentibus, & aequali ſuperficie praeditis ſolidum illud, quod eſt rectum, eſt* maximum *ceterarum ſolidorum ejuſdem generis, nimirum eodem laterum, vel angulorum numero in baſibus praeditorum.*

Dem. Si parallelepipeda, priſmata, & cylindri habeant ſub iiſdem baſibus ſuperficies aequales, ad eandem altitudinem aſſurgere nequeunt, ſecus ſolida obliqua ma-

 jorem

jorent (204. 205. 206.) haberent ſuperficiem contra hypotheſim; ſed cùm hujuſmodi ſolida obliqua minorem rectis habent ſub eadem baſi altitudinem, ſunt iis ſemper minora; ergo &c.

THEOREMA III.

208. *Ex omnibus parallelepipedis, & priſmatis ejuſdem generis in aequalibus baſibus, & altitudinibus conſtitutis, rectum illud, cujus baſis eſt regularis,* minima *tegitur tam curva, quam integra ſuperficie.*

Dem. Ex omnibus parallelepipedis, vel priſmatis aeque altis baſi eidem innixis, rectum minimam habet ſuperficiem (205.). Sed omnium hujuſmodi ſolidorum rectorum ſub aequalibus baſibus, & altitudinibus ſuperficies ſe excedunt pro perimetrorum in baſibus magnitudine; & inter omnia polygona aequalia ejuſdem generis, regulare minima circumdatur perimetro (64.); ergo &c.

THEOREMA IV.

209. *Ex omnibus parallepipedis, & priſmatis ejuſdem generis ſub aequali ſuperficie integra, & altitudine, rectum illud, quod baſim habet regularem, eſt* maximum.

Dem. Si hujuſmodi ſolida aeque alta baſibus aequalibus inſideant, illud, cujus baſis eſt regularis, minima obducetur ſuperficie (208.), quod hypotheſi adverſatur, ergo ut ſuperficies, ſint aequales, baſis regularis debet augeri, vel baſis irregularis imminui. Sed altitudines ſunt aequales, ergo &c.

THEOREMA V.

210. *Ex omnibus parallelepipedis, & priſmatis ejuſdem generis cum baſes, tum ſuperficies integras aequales habentibus, illud, quod baſi regulari adhaeret, eſt* maximum.

Dem.

Dem. Quoniam baſis regularis perimetro prae baſibus irregularibus aequalibus minima cingitur (64.), ut in hiſce ſolidis rectis ſuperficies ſint aequales, altitudo in ſolido baſi regulari gaudente major eſſe debet, adeoque hujuſmodi ſolidum erit *maximum*. Sed ut omnia iſta ſolida obliqua iiſdem baſibus cum ſolidis rectis innixa ſuperficies habeant eorum ſuperficiebus aequales, eſſe debent ipſis minora (207.); ergo &c.

THEOREMA VI.

211. *Ex omnibus parallelepipedis, & priſmatis ejuſdem generis aequales altitudines, & baſes iſoperimetras habentibus, parallelepipedum, vel priſma rectum baſi regulari praeditum eſt* maximum.

Dem. Ejuſmodi parallelepipeda, vel priſmata, ob aequales altitudines, ſunt in baſium ratione, ſed baſes ſunt iſoperimetrae, & inter figuras omnes iſoperimetras ejuſdem generis regularis eſt maxima (63.); ergo &c.

LEMMA.

212. *Si recta utcunque dividatur; cubus ſub tota adaequat aggregatum cuborum ſub ſegmentis, una cum triplo ſolidi ex totius in ſegmenta multiplicatione prodeuntis,*

Dem. Sit AB (*Fig.* 103.) utcunque diviſa in C, & cubus totius AB ſit DE. Sectis AO, AF in G, H, ita ut ſit GD = HF = BC, imaginare plana GK, HI, LM traducta per puncta G, H, C, oppoſitis cubi faciebus, quas interponuntur, parallela, ſeu cubi faciebus, quas dividunt, perpendicularia. Perſpicuum eſt, totum cubum reſolutum eſſe in duos cubos GO, IK latera ſegmentis AC, CB reſpective aequalia habentes, nec non in tria ſolida, quae oriuntur ducendo LE in rectangulum EN, item PT in rectangulum TV, & FH in rectangulum HI, nempe in 3AB. AC. BC. Sed ex omnibus hiſce ſolidis, velut

lut totum ex ſuis partibus, cubus ipſe DE coaleſcit; ergo $\overline{AB}^3 = \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC$. Q. E. D.

THEOREMA VII.

213. *Ex univerſis parallelepipedis aequalibus, minima cubus obducitur ſuperficie.*

Dem. Parallelepipeda recta, quorum baſes ſint quadrata, primò conſiderentur, ſitque BD (*Fig.* 103.) altitudo, BC latus baſeos quadratae parallelepipedi, AB latus cubi, ac ponatur $BD > AB$. Habemus (212.) $\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC = BD \cdot \overline{BC}^2$, ſive $\overline{BC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC < BD \cdot \overline{BC}^2$, quare $2\overline{BC}^3 + 6AB \cdot AC \cdot BC < 2BD \cdot \overline{BC}^2$, ſeu $2\overline{BC}^2 + 6AB \cdot AC < 2BD \cdot BC$. Adde utrinque $\overline{BC}^2$, eritque $3\overline{BC}^2 + 6AB \cdot AC < 2BD \cdot BC + \overline{BC}^2$. Sed $3AB \cdot AC + 3AB \cdot BC$ ($= 3AB \cdot AC + 3AC \cdot BC + 3\overline{BC}^2$) $< 3\overline{BC}^2 + 6AB \cdot AC$; ergo multo magis $3AB \cdot AC + 3AB \cdot BC = 3\overline{AB}^2 < 2BD \cdot BC + \overline{BC}^2$, ſive $6\overline{AB}^2 < 4BD \cdot BC + 2\overline{BC}^2$; *quod erat primum.*

Stantibus reliquis, ſit $BD < AB$ (*Fig.* 104.). Quoniam $\overline{CB}^3 = \overline{AC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC + \overline{AB}^3$ (212.), erit etiam $\overline{BC}^3 - 3AB \cdot AC \cdot BC - \overline{AC}^3 = \overline{AB}^3$; quare $\overline{AB}^3 > \overline{BC}^3 - 3AB \cdot AC \cdot BC - \overline{AC}^2 \cdot BC$. Sed (*per hyp.*) $\overline{AB}^3 = \overline{BC}^2 \cdot BD$; ergo $\overline{BC}^2 \cdot BD > \overline{BC}^3 - 3AB \cdot AC \cdot BC - \overline{AC}^2 \cdot BC$, ſive $BC \cdot BD > \overline{BC}^2 - 3AB$.

AC

$AC - \overline{AC}^2$, ſive $2BC.BD > 2\overline{BC}^2 - 6AB.AC - 2\overline{AC}^2$, adeoque potiori jure $2BC.BD + \overline{BC}^2 > 3\overline{AB}^2$; *quod erat ſecundum*.

Si parallelepipeda aequalia tam recta, quam obliqua aequales habeant altitudines, rectum illud, eujus baſis eſt quadratum, minima elauditur integra ſuperficie (208.); adeoque etiam inter omnia hujuſmodi parallelepipeda, eubus ipſis aequalis ſuperficie *minima* obducitur; *quod erat tertium*.

L E M M A.

214. *Si recta utcunque dividatur, cubus, qui fit a tota, eſt aequalis partium cubis, ſimul cum duobus ſolidis, quae prodeunt ex partium triplis per earundem quadrata reciproce multiplicatis.*

Dem. Rectae AB (*Fig.* 102.) uteunque diviſae in C eubus ſit DE. Retenta lemmatis noviſſimi (212.) conſtructione, liquet, totum eubum DE reſolutum eſſe 1°. in duos cubos GO, IK, quorum latera aequantur partibus AC, CB; 2. in tria parallelepipeda aequalia NO, DQ, OR, quae oriuntur, ducendo CB in quadratum BS, item GD in quadratum DI, atque FH in quadratum HQ, nempe in $3\overline{AC}^2.BC$; 3°. in alia tria parallelepipeda minora invicem aequalia, quae gignuntur multiplicando KE in quadratum EO, pariterque SN in quadratum NM, ac tandem IT in quadratum TR, nimirum in $3AC.\overline{BC}^2$. Sed haec omnia ſimul ſumpta totum cubum componunt; ergo $\overline{AB}^3 = \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3\overline{AC}^2.BC + 3AC.\overline{BC}^2$; Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM

215. Quum ſit $AC \cdot CB + \overline{CB}^2 = AB \cdot CB$, erit $\overline{AC}^2 + AC \cdot CB = \overline{AB}^2 - AB \cdot CB$, itidemque $3\overline{AC}^2 + 3AC \cdot CB = 3\overline{AB}^2 - 3AB \cdot CB$, quae plana aequalia ſi in eandem ducantur altitudinem BC, orietur $3\overline{AC}^2 \cdot BC + 3AC \cdot \overline{BC}^2 = 3\overline{AB}^2 \cdot BC - 3AB \cdot \overline{BC}^2$, factiſque in magnitudine nuper expoſita $\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3\overline{AC}^2 \cdot BC + 3AC \cdot \overline{BC}^2$ ſubſtitutionibus, habebis $\overline{AB}^3 = \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3\overline{AB}^2 \cdot BC - 3AB \cdot \overline{BC}^2$. Detrahe hinc inde $\overline{BC}^3 + 3\overline{AB}^2 \cdot BC$, & remanebit $\overline{AB}^3 - \overline{BC}^3 - 3\overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AC}^3 - 3AB \cdot \overline{BC}^2$. Adde utrinque $3AB \cdot \overline{BC}^2$, ac tandem fiet $\overline{AB}^3 - 3\overline{AB}^2 \cdot BC + 3AB \cdot \overline{BC}^2 - \overline{BC}^3 = \overline{AC}^3$. Similiter oſtendetur, eſſe $\overline{AB}^3 - 3\overline{AB}^2 \cdot AC + 3\overline{AC}^2 \cdot AB - \overline{AC}^3 = \overline{BC}^3$.

THEOREMA VIII.

216. *Ex univerſis parallelepipedis ſuperficies aequales habentibus, cubus eſt maximus.*

Dem. Poſitis omnibus ut in Theor. antec. (213.) eodemque ordine ſervato, eſto $BD > AB$ (*Fig.* 103.), quoniam (*ex hyp.*) habemus $3\overline{AC}^2 + 6AC \cdot BC + 3\overline{BC}^2 = 2DB \cdot BC + \overline{BC}^2$, ſeu $3\overline{AC}^2 + 6AC \cdot CB + 2\overline{CB}^2 = 2DB \cdot BC$, ſeu ſumptis dimidiis, $\frac{3}{2}\overline{AC}^2 + 3AC \cdot CB + \overline{CB}^2 = DB \cdot BC$, erit $3\overline{AC}^2 + 3AC$,

$+ 3\,AC \cdot CB + \overline{CB}^2 > DB \cdot BC$. Ducantur omnia iſta plana in altitudinem BC; fiet $3\,\overline{AC}^2 \cdot BC + 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 + \overline{BC}^3 > DB \cdot \overline{BC}^2$. Sed $\overline{AC}^3 + 3\,\overline{AC}^2 \cdot BC + 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 + \overline{BC}^3 = \overline{AB}^3$ (214) $> 3\,\overline{AC}^2 \cdot BC + 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 + \overline{BC}^3$; ergo multo magis $\overline{AB}^3 > DB \cdot \overline{BC}^2$; *quod erat primum*.

Iiſdem manentibus, ſtatue $BD < AB$ (*Fig.* 104.). Erit $3\,\overline{AB}^2 = 3\,\overline{BC}^2 - 6\,AC \cdot BC + 3\,\overline{AC}^2 = 2\,BD \cdot BC + \overline{BC}^2$; quare $3\,\overline{BC}^2 - 6\,AC \cdot BC + 3\,AC \cdot BC = 3\,\overline{BC}^2 - 3\,AC \cdot BC > 2\,BD \cdot BC + \overline{BC}^2$, ſive $2\,\overline{BC}^2 - 3\,AC \cdot BC > 2\,BD \cdot BC$; adeoque $2\,\overline{BC}^3 - 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 > 2\,BD \cdot \overline{BC}^2$, ſeu $\overline{BC}^3 - \frac{3}{2}\,AC \cdot \overline{BC}^2 > BD \cdot \overline{BC}^2$; ac multo magis $\overline{BC}^3 - 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 > BD \cdot \overline{BC}^2$. Sed $\overline{BC}^3 - 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 < \overline{BC}^3 - 3\,AC \cdot \overline{BC}^2 + 3\,\overline{AC}^2 \cdot BC - \overline{AC}^3 = \overline{AB}^3$ (215.); ergo potiori jure $\overline{AB}^3 > BD \cdot \overline{BC}^2$; *quod erat ſecundum*.

Si parallelepipeda tam recta, quam obliqua aequales habeant ſub aequali ſuperficie integra altitudines, illud quod baſi quadrata innititur, erit maximum (209.); quapropter etiam inter omnia hujuſmodi parallelepipeda cubus aequali cum iiſdem ſuperficie praeditus, eſt *maximus*; *quod erat tertium*.

THEOREMA IX.

217. *Ex omnibus cubis, qui bini accepti laterum, ſeu radicum ſummas aequales habent, par illud, quod duos cubos aequales continet*, minimam exhibet ſuperficiem.

Dem.

Dem. Sint duo cubi, quorum latera, DE, EF (*Fig.* 105.); ſit aliud cuborum par, quorum latera AB, BC invicem aequentur, ſitque praeterea AB + BC = DE + EF; ſumma planorum, quibus comprehenditur cuborum par ſub lateribus aequalibus AB, BC, eſt ad ſummam planorum, quibus tegitur cuborum par ſub lateribus inaequalibus DE, EF, ut $2\overline{AB}^2$ ad $\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2$; ſed primum quadratorum aggregatum eſt altero ſemper minus (33.), ergo &c.

THEOREMA X.

218. *Sit quilibet cuborum invicem aequalium numerus; ſint totidem cubi non omnes invicem aequales, in quibus ſimul ſumptis laterum, ſeu radicum aggregatum adaequet aggregatum laterum, ſeu radicum cuborum aequalium; dico cuborum iſtorum aequalium ſimul ſumptorum ſuperficiem* minimum *aggregatum componere.*

Dem. Si negas; in ſerie cuborum non omnium aequalium ſint duo ſaltem cubi inaequales $\overset{3}{A}$, $\overset{3}{B}$. Tam hiſce quam invicem aequales imaginare duos cubos, in quibus laterum, ſeu radicum aggregatum adaequet aggregatum laterum, ſeu radicum in cubis $\overset{3}{A}$, $\overset{3}{B}$ exiſtentium. Cuborum invicem aequalium ſuperficies minimum aggregatum formabit (33.), ergo cuborum inaequalium ſeries minimum non continet ſuperficiei aggregatum, quod hypotheſi adverſatur; & ita ſemper, donec ad cubos omnes aequales pervenias. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

219. Idem locum obtinet in ſolidis univerſis ſimilibus, in quibus laterum homologorum aggregata ſunt aequalia, hujuſmodi enim ſolidorum ſuperficies ſunt laterum homologorum quadratis proportionales.

CORO-

COROLLARIUM II.

220. Si recta ſit in quotcumque partes aequales, nec non in totidem non omnes aequales quomodocumque diviſa, cuborum ex partibus aequalibus ſuperficies ſimul ſumptae *minimum* aggregatum efficient. Idem de ſolidorum ſimilium, quorum latera homologa ſupra aequales haſce partes conſiſtant, ſuperficiebus eſt pronunciandum.

THEOREMA XI.

221. *Ex omnibus cubis, qui bini accepti laterum, ſeu radicum ſummas aequales habent, par illud, quod duos cubos aequales comprehendit, eſt* minimum.

Dem. Duorum cuborum aequalium latera AC, CB (*Fig.* 37.) in directum poſita rectam *AB* efficiant. Quoniam lateribus iſtis aequari debent latera cuborum inaequalium, hujuſmodi latera ſint AD, DB. Cubus lateris AD, ſive $AC + CD$, erit $\overline{AC}^3 + 3\overline{AC}^2 . CD + 3AC . \overline{CD}^2 + \overline{CD}^3$ (214.); cubus lateris DB, ſive $AC - CD$, erit $\overline{AC}^3 - 3\overline{AC}^2 . CD + 3AC . \overline{CD}^2 - \overline{CD}^3$ (215.), quorum cuborum aggregatum $= 2\overline{AC}^3 + 6AC . \overline{CD}^2$; ſed cuborum ex lateribus aequalibus *AC*, CB aggregatum eſt $2\overline{AC}^3$; ergo &c.

COROLLARIUM

222. Si recta ſit bifariam, & non bifariam diviſa, aggregatum cuborum ex portionibus aequalibus erit *minimum*.

THEOREMA XII.

223. *Sit quilibet cuborum invicem aequalium numerus; ſint*

toti-

totidem cubi, quorum ſaltem aliquis non ſit reliquis aequalis, ea tamen conditione, ut laterum aggregatum in ſerie cuborum invicem aequalium adaequet laterum aggregatum in altera ſerie, ajo, cuborum invicem aequalium aggregatum eſſe minimum.

Demonſtratio eſt ſimilis demonſtrationi Thor. X. (218.).

Corollarium

224. Si recta ſit in quotcumque partes aequales, nec non in totidem non omnes aequales quomodocumque diviſa; cubi partium aequalium *minimum* efficient aggregatum. Quod de ſolidis ſimilibus & aequalibus comparate ad totidem ſolida ipſis ſimilia & non omnia inter ſe aequalia certum eſt, dummodo ſolidorum iſtorum latera homologa in hujuſmodi rectae ſic diviſae portionibus accipiantur.

Theorema XIII.

225. *Exprimat* n *numerum quemlibet integrum affirmativum, & recta* AB (Fig. 37.) *ita ſecetur in C, ut ſit* $CB = \frac{1}{n+1} AB$; *ſumpto quovis alio puncto* D, *dico, fore ſemper* $\overline{AC}^3 + n^2 \overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + n^2 \overline{DB}^3$.

Dem. Quoniam poſito $n = 1$, res patet (221.), ſtatuatur $n = 2$, erit CB pars tertia ipſius *AB*. Finge, eſſe AC bifariam diviſam. Cubus portionis AC octo cubos aequales continebit, quorum radices (quae ſingulae portionem *CB* adaequant) ſimul ſumptae quadruplum component ipſius AC. Radices quatuor cuborum, quorum unuſquiſque ſit cubo $\overline{CB}^3$ aequalis, aggregatum efficiunt quadruplum portionis *CB*. Quare poſitis omnibus hujuſmodi cuborum radicibus in directum, recta orietur totius *AB* quadrupla. Secta deinde bifariam portione AD, pari

ratio-

ratiocinio conſtabit, cubum $\overline{AD}^3$ in octo cubos aequales diſpeſci poſſe, quorum radices ſimul ſumptae erunt quadruplae portionis AD; quatuor autem radices cuborum ſingulorum aequalium cubo reliquae portionis DB, ſunt ipſius DB quadruplae; ergo iſtarum quoque omnium ſecundarum radicum aggregatum erit totius AB quadruplum. Sed poſito $CB = \frac{1}{3} AB$, duodecim memorati cubi ſunt invicem aequales; ergo (223.) habemus $\overline{AC}^3 + 4\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + 4\overline{DB}^3$.

Fiat modo $n = 3$; erit $CB = \frac{1}{4} AB$, & cubus portionis AC (quae trifariam ſecta intelligatur) viginti ſeptem cubos cubo $\overline{CB}^3$ ſingulos aequales comprehendet, quorum radices ſimul ſumptae erunt noncuplae portionis AC; novem autem cuborum $\overline{CB}^3$ radices noncuplum efficiunt portionis CB. Praeterea trifariam ſecta portione AD, ejus cubus cubos viginti ſeptem aequales complectetur, quorum radices ſimul ſumptae noncuplum ipſius AD continent, & novem cubi, quorum unuſquiſque cubum $\overline{DB}^3$ adaequet, radices habent, quarum aggregatum eſt portionis DB noncuplum. Quum itaque ſinguli cubi, in quos cubum $\overline{AC}^3$ reſolutum poſuimus, ſint aequales cubo $\overline{CB}^3$, patet, eſſe debere $\overline{AC}^3 + 9\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + 9\overline{DB}^3$.

Similiter procedendo, ſi fiat $CB = \frac{1}{5} AB$, invenietur $\overline{AC}^3 + 16\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + 16\overline{DB}^3$, adeoque generatim ſi ſtatua-

G CB

$CB = \frac{1}{n+1} AB$, elicietur $\overline{AC}^3 + n\,\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + n\,\overline{DB}^3$, Q. E. D.

Corollarium

226. Idem ſentiendum de ſolidis ſimilibus, quorum latera homologa ſint AC, CB, reſpectu aliorum ſolidorum prioribus ſimilium, & latera ipſorum lateribus homologa AD, DB habentium.

Theorema XIV.

227. *In recta* AB (Fig. 37.) *ita diviſa in* C, *ut ſiat* nCB = AB (n *numerum quemvis integrum affirmativum, unitate excluſa, indicante*) *ſumatur quodlibet aliud punctum* D; *ajo, cubi* $\overline{AC}^3$ ſuperficiem una cum ſuperficiebus *cuborum* (n - 1) $\overline{CB}^3$ *ſemper eſſe* minorem *ſuperficie cubi* $\overline{AD}^3$ *una cum ſuperficiebus cuborum* (n - 1) $\overline{DB}^3$.

Dem. Superficies cubi $\overline{AC}^3$ eſt ſextupla quadrati $\overline{AC}^2$, ſuperficies ſingulorum cuborum (n - 1) $\overline{CB}^3$ ſunt ſextuplae quadrati $\overline{CB}^2$, ſuperficies itidem cubi $\overline{AD}^3$ eſt ſextupla quadrati $\overline{AD}^2$, nec non ſuperficies ſingulorum cuborum (n - 1) $\overline{DB}^2$ ſunt ſextuplae quadrati $\overline{DB}^2$. Ergo ſuperficies cubi $\overline{AC}^3$ unà cum ſuperficiebus cuborum (n - 1) $\overline{CB}^2$ ſunt ad ſuperficiem cubi $\overline{AD}^3$ unà cum ſuperficiebus cuborum (n - 1) $\overline{DB}^3$, ut $\overline{AC}^2 + (n - 1)\overline{CB}^2$ ad $\overline{AD}^2 + (n - 1)\overline{DB}^2$. Sed cùm

nCB

$nCB = AB$, ſit ſemper $\overline{AC}^2 + (n-1)\,\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + (n-1)\,\overline{DB}^2$ (79.); ergo &c.

C O R O L L A R I U M

228. Idem ad ſolida ſimilia, debitis adhibitis praecautionibus, extendi poteſt.

L E M M A.

229. *Concipe parallelepipeda, vel priſmata recta, quorum baſes ſint quadrata, aut polygona regularia ejuſdem generis* BCDE, HILM (Fig. 106. 107.), *altitudines* AB, GH; *ajo, cylindrorum ipſis inſcriptorum ſuperficies integras eſſe dictorum ſolidorum ſuperficiebus integris proportionales.*

Dem. Baſibus $BCDE$, HILM in triangula iſoſcelia aequalia, & ſimilia reſolutis, ut figuris, inſcribantur circuli, ex quorum centris N, O (quae erunt in triangulorum iſoſcelium verticibus ſimul coeuntibus) demittantur in latera BC, HI normales NP, OQ contactuum punctis P, Q occurrentes. Parallelepipedi, aut priſmatis alterius ſuperficies integra erit ad alterius parallelepipedi, aut priſmatis integram ſuperficiem, ut $mBC.(AB + NP)$ ad $mHI.(GH + OQ)$, poſito laterum BC, aut HI numero $= m$. Jam verò circumferentia figurae $BCDE$ inſcripta vocata T, & circumferentia inſcripta figurae HILM appellata V, ſuperficies integra cylindri alterius erit ad alterius cylindri integram ſuperficiem, ut $T.(AB + NP)$ ad $V.(GH + OQ)$. Sed $T : V = mBC : mHI$, ergo $mBC.(AB + NP) : mHI.(GH + OQ) = T.(AB + NP) : V.(GH + OQ)$. Q. E. D.

T H E O R E M A XV.

230. *Ex omnibus cylindris aequalibus, ille, cujus altitudo*

titudo baſeos diametrum adaequat, minima *ſuperficie integra comprehenditur*.

Dem. Ex univerſis parallelepipedis aequalibus, cubus minimam exhibet ſuperficiem (213.); ſed cylindrorum rectorum ſuperficies integrae ſunt parallelepipedis circumſcriptis proportionales (229.); ergo inter omnes cylindros rectos aequales, ille, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, *minima* tegitur ſuperficie. Jam verò cylindri obliqui rectis aequales, & in eadem baſi conſtituti, majori quam ipſi pollent ſuperficie (204.); ergo &c.

COROLLARIUM

231. Quoniam priſmata regularia ejuſdem generis, cylindris rectis aequalibus circumſcripta, ſunt & ipſa aequalia, atque integras ſuperficies habent cylindorum ſuperficiebus integris proportionales (229.); priſma cylindro recto, cujus altitudo baſeos diametrum adaequet, circumſcriptum, *minima* ex iſtis obducetur integra ſuperficie. Idcircò inter omnia priſmata recta ejuſdem generis aequalia, illud, cujus altitudo, ex. gr: AB (*Fig.* 106.), adaequat duplum radij NP a centro N baſeos BCDE ad unum BC ex ejuſdem lateribus normaliter educti, *minima* afficietur integra ſuperficie. Sed ex omnibus priſmatis ejuſdem generis ſub aequalibus baſibus, & altitudinibus, rectum illud, cujus baſis eſt regularis, minima praeditum eſt ſuperficie (208.); ergo generatim ex univerſis priſmatis ejuſdem generis aequalibus baſi cuicumque innixis, regulare illud, cujus altitudo eſt dupla radij a centro baſeos ad unum ex ejuſdem lateribus normaliter educti, *minima* ſuperficie integra comprehenditur.

THEOREMA XVI.

232. *Ex omnibus cylindris aequales ſuperficies integras habentibus; rectus ille, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, eſt* maximus. *Dem.*

Dem. Ex univerſis parallelepipedis aequali ſuperficie obductis cubus eſt maximus (216.); ſed cylindri, quibus hujuſmodi parallelepipeda circumſcribuntur, habent & ipſi ſuperficies integras aequales (229.); nec non ſunt ipſis proportionales, ergo &c.

COROLLARIUM

233. Igitur ex univerſis quoque priſmatis aequali ſuperficie integra praeditis, regulare illud, cujus altitudo duplum radij a centro baſeos ad unum ex ejuſdem lateribus normaliter educti adaequat, eſt *maximum*; quod facile oſtenditur, ſi ratiocinium illi analogum, quod in Theorematis praecedentis corollario expoſuimus (231.), adhibeatur.

THEOREMA XVII.

234. *Ex omnibus cylindris aggregata ex altitudinibus, & baſium diametris aequalia habentibus; illud, in quo baſeos diameter duplam altitudinem adaequat, eſt* maximus.

Dem. In duobus cylindris *AB*, CD (*Fig*. 108, 109.), quorum altitudines AG, CE, & baſium diametri *GB*, ED, ſit AG + *GB* = CE + ED, ſed in cylindro *AB* ſit *GB* = 2 AG, Cylindrus *AB* erit ad cylindrum CD, ut

$AG.\overline{GB}^2$ ad $CE.\overline{ED}^2$; ſed $AG.\overline{GB}^2 > CE.\overline{ED}^2$ (143.); ergo &c.

COROLLARIUM

235. Idem quoque ſub eadem conditione ſe habet in conis; pariterque in priſmatis regularibus ejuſdem generis, in quibus aggregata ex altitudinibus, & baſium duplis radijs a centro earundem baſium ad latus aliquod normaliter eductis, aequantur.

THEOREMA XVIII.

236. *Inter omnes cylindros rectos* AB, CD (Fig. 108. 109.) *ſuperficies convexas in proportione geometrica reciproca cum baſibus* GMB † AHN, EDF † CQR *habentes, ille* AB, *cujus altitudo* AG *baſeos* GBM *radium* GP *adaequat, minima induitur integra ſuperficie.*

Dem. Quum ſit AG = GP, ſuperficies curva cylindri *AB* erit dupla baſeos *GBM*, ſive aequalis aggregato baſium GBM, AHN; eſt autem (*per hyp.*) ſuperficies curva cylindri *AB* ad ſuperficiem curvam cylindri CD, ut baſium EDF, CQR aggregatum ad aggregatum baſium GBM, AHN, ergo ſi ſuperficies curva cylindri CD ſit major ſuperficie curva cylindri *AB*, baſium EDF, CQR aggregatum erit minus aggregato baſium GBM, AHN, & viciſſim, adeoque ſuperficies integra cylindri *AB* erit minor ſuperficie integra cylindri CD (*per* 25. 5. *Elem.*) & hoc ſemper. Q. E. D.

COROLLARIUM

237. Idem ratiocinium priſmatis quibuſcumque poteſt etiam applicari; etenim inter priſmata, de quibus eſt quaeſtio, illud, in quo baſium ſuperficies reliquam ſuperficiem adaequat, minima ſuperficie integra claudetur.

THEOREMA XIX.

238. *Inter omnes pyramides* ABDEG, FBDEG (Fig. 110.) *aeque altas idem rectangulum* BE *pro baſi, nec non triangula* ADE, FDE, *&* *hiſce oppoſita* ABG, FBG *jacentia in iiſdem planis habentes, recta* ABDEG *minima obducitur ſuperficie.*

Dem. Concipe planum per harum pyramidum axes AC, FC tranſiens. Liquet, hoc bifariam dividere pyramides per ſectiones AHI, FHI, quae erunt triangula aequalia in eadem baſi HI conſtituta, adeoque trianguli iſoſcelis AHI

AHI perimeter erit minor perimetro trianguli iſoſceli FHI (7.). Sed AH, AI, FH, FI ſunt altitudines triangulorum ABD, AEG, FBD, FEG, & reliqua triangula ſunt (*ex hyp.*) aequalia; ergo &c.

THEOREMA XX.

239. *Inter omnes pyramides* ABDEG, FBDFG (Fig. 110.) *idem rectangulum pro baſi, aequales ſuperficies, ac duo triangula oppoſita in iiſdem planis jacentia habentes, recta eſt* maxima.

Dem. Quum pyramidum ſuperficies ſint aequales, triangulorum ABD, AGE aggregatum erit aequale aggregato triangulorum FBD, FGE, adeoque triangulorum ABD, AGE altitudines AH, AI ſimul ſumptae erunt triangulorum FBD, FGE altitudinibus FH, FI ſimul ſumptis aequales; trianguli igitur AHI, FHI baſi eidem inſidentia erunt iſoperimetra. Sed tunc trianguli AHI altitudo eſt major altitudine trianguli FHI (10.); ergo &c.

THEOREMA XXI.

240. *Ex omnibus conis rectis aequalibus* ABIC, DEKF (Fig. 111. 112.), *quorum axes* AG, DH; *ille* ABIC, *in quo altitudo* AG *radii baſeos duplum poteſt, ſeu in quo* $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$, *minimam convexam ſuperficiem ſuppeditat.*

Dem. Per axes AG, DH traducantur duo plani; ſectiones erunt duo triangula iſoſcelia BAC, EDF. Jam verò quum coni ſint ut producta ex quadratis diametrorum baſium in altitudines, & conus ABIC ponatur aequalis cono DEKF, in triangulis BAC, EDF erit AG. $\overline{BC}^2 = DH.\overline{EF}^2$; ſed triangulum BAC habet $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$; ergo AB. BG < DE. EH (153.). Ut autem AB. BG ad DE. EH, ita eſt ſuperficies convexa coni recti ABIC ad ſu-

perficiem convexam coni recti DEKF; ergo ſuperficies convexa coni ABIC eſt *minor* ſuperficie convexa cujuſcumque coni recti eidem aequalis DEKF. Q. E. D.

Corollarium

241. Idem de pyramidibus regularibus aequalibus ejuſdem generis ſtatuendum eſt; in iis enim illa, cujus altitudo duplum poteſt radij a baſeos centro ad ejuſdem baſeos latus aliquod normaliter educti, *minimam* habet, baſibus excluſis, ſuperficiem.

THEOREMA XXII.

242. *Ex omnibus conis rectis ſuperficies convexas aequales habentibus, ille, cujus altitudo duplum poteſt radij baſeos, eſt* maximus.

Dem. Sint coni recti ABIC, DEKF (*Fig.* 111. 112.) ſuperficiebus curvis aequalibus praediti, quorum axes AG, DH, ductiſque baſium diametris BC, EF, conus ABIC ejus ſit naturae, ut altitudo AG duplum poſſit baſeos radij BG. Ex punctis G, H demitte ſuper latera AB, DE normales GM, HN. Conorum ABIC, DEKF ſoliditates ſunt ut eorum ſuperficies convexae ductae in reſpectivas normales GM, HN; ſed dictae ſuperficies convexae ponuntur aequales; ergo ſoliditas coni ABIC eſt ad ſoliditatem coni DEKF, ut GM ad HN; in triangulis autem BAC, EDF ex conorum ſectionibus per axes coortis eſt GM omnium HN maxima (154.); ergo conus ABC, in quo $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$, eſt *major* cono quovis DEKF aequali cum ipſo convexa ſuperficie affecto. Q. E. D.

Corollarium

243. Idem ratiocinium ad pyramides regulares ejuſdem generis, in quibus ſuperficies, baſibus non computatis aequantur, applicari poteſt; in iis ſiquidem illa, cujus altitudo duplum poteſt radii a centro baſeos ad ipſius baſeos latus aliquod normaliter educti, eſt *maxima*

THEO-

T H E O R E M A XXIII.

244. *Ex omnibus conis rectis aequalibus, ille cujus altitudo duplum poteſt diametri baſeos*, minimam, *exhibet integram ſuperficiem*.

Dem. Sint triangula rectangula ACB, FIH (*Fig.* 113. 114.), in quibus $AC . \overline{BC}^2 = FI . \overline{HI}^2$, iiſque ſupra altitudines AC, FI inſcribantur, ut in figuris, ſemicirculi CKN, IRS, quorum radij PC, QI; in triangulo autem ACB altitudo *AC* octuplum poſſit baſeos BC. Quoniam (*ex hyp.*) $HI ; BC = AC . CB : FI . IH = PC . (AB + BC) : QI . (FH + HI)$, erit $PC . BC . (AB + BC) = QI . HI . (FH + HI)$, unde $(AB + BC) . BC : (FH + HI) . HI = QI : PC$; ſed $QI < PC$ (176.); ergo $(AB + BC) . BC < (FH + HI) . HI$, & ſic ſemper. Fac modo, ut haec triangula revolvantur circa altitudines AC, FI; orientur coni aequales *A*BED, FHML; ſed horum ſuperficies integrae ſunt ut $(AB + BC) . BC$ ad $(FH + HI) . HI$; ergo &c.

C o r o l l a r i u m

245. Idem ad pyramides regulares aequales ejuſdem generis aptatur; ex iſtis enim omnibus illa, cujus altitudo duplum poteſt dupli radij a centro baſeos ad baſeos ejuſdem latus aliquod normaliter educti, *minima* tegitur integra ſuperficie.

T H E O R E M A XXIV.

246. *Ex omnibus conis rectis, quorum integrae ſuperficies aequuntur, ille, cujus altitudo duplum poteſt diametri baſeos, eſt* maximus.

Dem. Sint (*Fig.* 113. 114) triangula rectangula *A*CB, FIH (dimidia pro integris expono), in quibus $AB . BC + \overline{BC}^2 = FH . HI + \overline{HI}^2$, iiſque inſcribantur, ut in figuris,

ſemi-

ſemicirculi CKN, IRS, quorum radij PC, QI, trianguli vero ABC altitudo AC octuplum poſſit baſeos BC. Quum ſit ſemicirculus CKN major ſemicirculo IRS (176.), etiam radius PC major erit radio QI; quapropter $AB.BC.CP + \overline{BC}^2.CP > FH.HI.IQ + \overline{HI}^2.IQ$. Sed ſi triangula ACB, FIH (ſtantibus altitudinibus AC, FI) circumagi concipiantur, coni inde prodeuntes erunt in eadem ratione majoris inaequalitatis; ergo &c.

C o r o l l a r i u m

247. Idem locum obtinet in pyramidibus regularibus ejuſdem generis aequali ſuperficie integra gaudentibus; illa enim ex iſtis eſt *maxima*, cujus altitudo duplum poteſt dupli radij a centro baſeos ad ipſius baſeos latus aliquod normaliter educti.

T H E O R E M A XXV.

248. *Ex omnibus conis rectis, qui per axes diviſi aggregata longitudinum in ſuperficiebus convexis a planis ſecantibus effectarum, habent aequalia; ille, in quo baſeos radius duplum poteſt altitudinis, eſt* maximus.

Dem. Eſto AB (*Fig.* 77.) longitudo communis ſuperficiei convexae in conis rectis, quorum altitudines BC, BE, baſeos radij AC, AE, ponaturque $\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$; erit $\overline{AC}^2.CB > \overline{AE}^2.EB$ (141.); ſed ſi triangula ABC, ABE circa axes BC, BE in gyrum ducas, coni inde conſurgentes ſunt ut producta $\overline{AC}^2.CB$, $\overline{AE}^2.EB$; ergo conus ex triangulo BAC *major* erit cono ex triangulo BAE, & ita ſemper. Q. E. D.

T H E O R E M A XXVI.

249 *Ex univerſis cylindris aequalibus, rectus ille, cujus*

jus altitudo baſees diametrum adaequat, minimam prae ſuperficiem integram prae ſingulis omnium priſmatum ipſi aequalium integris ſuperficiebus.

Dem. Si priſma rectum ad eandem cum cylindro recto ipſi aequali aſſurgat altitudinem, baſes aequabuntur, & ſuperficies, demptis baſibus, erunt ut baſium perimetri; ſed cylindri baſis minori perimetro circumdatur (197.); ergo cylindri recti ſuperficies erit *minor* ſuperficie priſmatis recti aequali cum ipſo altitudine, ac ſoliditate praediti. Jamvero ex univerſis cylindris aequalibus, ille, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, minima obducitur integra ſuperficie (230.); ergo cylindrus iſte *minima* prae priſmatis omnibus rectis ipſi aequalibus ſuperficie integra obducetur. Superficies autem priſmatum rectorum ſub iiſdem baſibus, & altitudinibus ſunt priſmatum obliquorum ſuperficiebus minores [203]; ergo &c.

THEOREMA XXVII.

250. *Cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, eſt omnium priſmatum aequales cum ipſo ſuperficies integras habentium* maximus.

Dem. Si priſma rectum, & cylindrus rectus baſibus aequalibus ſuſtineantur; cylindri baſis minori perimetro donabitur (197.), quare quum ſuperficies integrae eſſe debeant aequales, cylindri altitudo maior erit altitudine priſmatis, ipſi ſoliditates ſunt hoc in caſu ut altitudines; ergo cylindrus rectus erit *major* priſmate ſub aequali baſi, ac ſuperficie. Verum ex omnibus cylindris aequali ſuperficie integra affectis, rectus ille, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, eſt maximus (232.), ergo cylindrus iſte erit omnium priſmatum rectorum aequales cum ipſo ſuperficies integras habentium *maximus*. At priſma rectum eſt priſmate quovis obliquo in eadem baſi ſub eadem conditione conſtituto majus (203.); ergo &c.

THEO-

THEOREMA XXVIII.

251. *Conus rectus, cujus altitudo diametri baſeos duplum poteſt, minimam prae ſingulis omnium pyramidum regularium ipſi aequalium integris ſuperficiebus ſuppeditat integram ſuperficiem.*

Dem. Pyramidis ABGDE (*Fig.* 115.) baſis BGDE ſ. aequalis, & concentrica in C cum AFNQ baſi MFNQ & altitudo AC ponatur communis. Patet, baſeos regularis BGDE latera circumferentiam MFNQ pluribus locis certa lege ſecare debere, ut in figura. Sit itaq ED unum ex lateribus dictae baſeos ſecans circumferentiae portionem IQL in punctis I, L, & eidem lateri centro C agatur normalis CP, quae producta occur circumferentiae in Q.

Quoniam circulus MFNQ, & baſis BGDE aequant vocatis circumferentia X, & baſeos perimetro Z, CQ . X = CP . Z, ex quo CQ : CP = Z : X; quia verò j ctis AQ, AP, eſt AQ > AP, pone AH = AP, & con cte PH. Ob angulum PHQ obtuſum, erit PQ > H quare quum ſit etiam AP > CP, habemus HQ : AP PQ : CP, ſeu $\frac{HQ}{AP} < \frac{PQ}{CP}$; hinc AQ : AP < CQ : CP, $\frac{AQ}{AP} < \frac{CQ}{CP}$, diviſa enim AQ per AP, fit quotus 1 $\frac{HQ}{AP}$, & diviſa CQ per CP, prodit $1 + \frac{PQ}{PC}$, adeoque $1 + \frac{HQ}{AP} < 1 + \frac{PQ}{CP}$. Sed CQ : CP = Z : X; ergo AQ : AP < Z : X, ac proinde AQ . X < AP . Z, nimirum coni AFNQ ſuperficies eſt *minor* ſuperficie pyramidis ABGDE. Verùm ſi conus iſta habeat altitudinem, quae diametri ba-

baſeos duplum poſſit, minima prae conis omnibus ipſi aequalibus afficitur ſuperficie (244.); ergo &c.

THEOREMA XXIX.

252. *Conus rectus, cujus altitudo dinmetri baſeos duplum poteſt, omnium pyramidum regularium aequalem cum ipſis ſuperficiem integram habentium eſt* maximus.

Dem. In cono recto AFNQM (*Fig.* 115.), & pyramide regulari ABGDE ſuperficies integrae ſint aequales, & altitudo AC communis. Ducto radio CQ, qui latus DE ſecet ad angulos rectos in P, poſitaque circuli MN circumferentia $= X$, & polygoni regularis BD perimetro $= Z$, erit $(AQ + QC) . X = (AP + PC) . Z$, adeoque $AQ + QC : AP + PC = Z : X$; ſed $AQ > AP$, ut hypotheſis ſervetur; ergo ſumpta in AQ portione $AH = AP$, junctaque PH, erit $AP : PC > HQ : PQ$, & idcircò $AP . PQ > PC . HQ$. Adde utrinque $PC . PQ$; fiet $AP . PQ + PC . PQ > PC . HQ + PC . PQ$; hinc $PQ : PC > HQ + PQ : AP + PC$; & componendo, $CQ : CP > AQ + QC : AP + PC$; ac proinde $CQ : CP > Z : X$, unde $CQ . X > CP . Z$. Sed altitudo AC eſt communis; ergo conus AFNQM eſt *major* pyramide regulari ABGDE. Quod ſi conus AFNQM talis aſſumatur, ut ejus altitudo diametri baſeos duplum poſſit, hic erit omnium conorum (246.), ac multo magis omnium pyramidum regularium ſub aequalibus ſuperficiebus integris *maximus*. Q.E.D.

THEDREMA XXX.

253. *Cyliodrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, ſingulis conorum omnium rectorum ipſi aequalium integris ſuperficiebus* minorem *poſſidet inſtegrum ſuperficiem*.

Dem. Sit cylindrus rectus ABDE (*Fig.* 116. 117.), cujus altitudo MC baſeos diametrum BD adaequet; ſic conus rectus FGKH, cujus altitudo FL duplum poſſit

baſeos

baſeos diametri GH. Erit (*ex hyp.*) $\overline{BD}^3 = \frac{1}{3}\overline{GH}^2 . FL$, ſive $\overline{MC}^3 = \frac{1}{6}\overline{FL}^3$, ſive $6\overline{MC}^3 = \overline{FL}^3$. Sed ſi foret $\overline{FL}^3 = 8\overline{MC}^3$, foret etiam $FL = 2MC$, quare quum ſit $6\overline{MC}^3 < 8\overline{MC}^3$, erit $FL < 2MC$. Jam verò vocatis baſeos cylindri circumferentia X, baſeos coni circumferentia Z, erit integra cylindri ſuperficies $= CD . X + MC . X$, & coni ſuperficies integra $= \frac{1}{2} LH . Z + \frac{1}{2} FH . Z$; ſed ob $\overline{FH}^2 = \overline{FL}^2 + \overline{LH}^2 = 8\overline{LH}^2 + \overline{LH}^2 = 9\overline{LH}^2$, fit $FH = 3LH$; ergo ſuperficies integra cylindri erit ad integram coni ſuperficiem, ut $3\overline{CD}^2$ ad $2\overline{LH}^2$, ſive ut $3\overline{BD}^2$ ad $2\overline{GH}^2$, ſive ut $3\overline{MC}^2$ ad $\overline{FL}^2$. Sed propter $6\overline{MC}^3 = \overline{FL}^3$, ſtat $3\overline{MC}^2 : \overline{FL}^2 = FL : 2MC$; ergo ſuperficies integra cylindri ABDE eſt *minor* integra coni FGKH ſuperficie. At coni FGKH ſuperficies integra eſt ſingulis omnium conorum rectorum ipſi aequalium ſuperficiebus integris minor (244), ergo &c.

THEOREMA XXXI.

254. *Cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametram adaequat, eſt quocumque cono recto ſub aequali ſuperficie integra* major.

Dem. Cylindri recti ABDE (*Fig.* 116. 117.) altitudo MC baſeos diametrum BD adaequet, & coni recti FGKH altitudo FL baſeos diametri GH duplum poſſit, praeterea tam cylindri, quam coni ſuperficies integrae ſint aequales. Igitur $3\overline{MC}^2 = \overline{FL}^2$ per ſuperius (253.) demonſtrata; quapropter ſi foret $4\overline{MC}^2 = \overline{FL}^2$, foret etiam $2MC = FL$,

$= FL$, ſed $4\overline{MC}^2 > 3\overline{MC}^2$, ergo $2MC > FL$, multoque magis $3MC > FL$. Cylindrus autem eſt ad conum, ut $\overline{MC}^3$ ad $\frac{1}{3}\overline{GH}^2 . FL$, ſive ut $\overline{MC}^3$ ad $\frac{1}{6}\overline{FL}^3$, ſive ut $6\overline{MC}^3$ ad $\overline{FL}^3$, ſive ut $6\overline{MC}^3$ ad $3\overline{MC}^2 . FL$, ſive ut $3MC$ ad FL; ergo cylindrus $ABDE$ eſt major cono $FGKH$. Sed conus $FGKH$ eſt omnium conorum ſub aequali ſuperficie integra maximus (246.); ergo &c.

THEOREMA XXXII.

255. *Cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, minimam prae omnibus cylindris, priſmatis, conis rectis, ac pyramidibus regularibus ipſi aequalibus exhibet integram ſuperficiem.*

Dem. Cylindrus, de quo eſt quaeſtio, minima prae omnibus cylindris, ac priſmatis ipſi aequalibus ſuperficie circumcluditur (230. 249.). Conus rectus, cujus altitudo diametri baſeos duplum poteſt, minima prae omnibus conis rectis, & pyramidibus regularibus ipſi aequalibus praeditus eſt ſuperficie (244. 251.). Sed cylindrus recenſitus minorem habet quam dictus conus rectus integram ſuperficiem [253.]; ergo &c.

THEOREMA XXXIII.

256. *Cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, eſt omnium cylindrorum, priſmatum, conorum rectorum, ac pyramidum regularium ſub aequali ſuperficie integra maximus.*

Dem. Cylindrus recenſitus eſt omnium cylindrorum, ac priſmatum ſub aequali ſuperficie integra maximus (232. 250.). Conus rectus, cujus altitudo diametri baſeos duplum poteſt, eſt omnium conorum rectorum, ac pyra-

pyramidum regularium ſub aequali ſuperficie integra maximus (246. 252.). Sed cylindrus ſub expreſſa conditione eſt quocumque cono recto ſub aequali ſuperficie integra major (254); ergo &c.

THEOREMA XXXIV.

257. *Sphaera prae omnibus cylindris ipſi aequalibus minima efficitur ſuperficie.*

Dem. Sit cylindrus MN (*Fig.* 118.), cuius altitudo EF baſeos diametrum LN adaequet; ſit ſphaera ABD ipſi aequalis, cuius diameter *A*C, circulus maximus ABCD. Erit igitur circulus ABCD ductus in $\frac{2}{3}$ AC aequalis rectae EF ductae in baſim HI; hoc eſt circuli ABCD circumferentia vocata X, baſeos cylindricae HI circumferentia appellata Z, erit $\frac{1}{6}\overline{AC}^2 . X = \frac{1}{4}\overline{EF}^2 . Z$, ex quo elicitur $\frac{1}{6}$ AC . X : $\frac{1}{4}$ EF . Z = EF : AC. Sed ſpherae ſuperficies = AC . X, & integrà cylindri ſuperficies = $\frac{3}{2}$ EF . Z; ergo ſumpta utriuſque ſuperficiei parte ſexta, habemus $\frac{1}{6}$ AC . X : $\frac{1}{4}$ EF . Z = EF : *A*C, nimirum ſphaerae ABD ſuperficies erit ad integram cyindri MN ſuperficiem, ut EF ad AC; eſt autem EF < AC; ergo ſphaerae *A*BD ſuperficies eſt *minor* ſuperficie integra cylindri MN eidem aequalis. Jam verò cylindri, cuius altitudo baſeos diametrum adaequat, ſuperficies eſt minor quacumque cylindrorum ipſi aequalium ſuperficie (23o.), ergo &c.

THEOREMA XXXV.

258. *Sphaera eſt omnium cylindrorum aequales cum ipſa ſuperficies integras habentium maxima.*

Dem.

Dem. Cylindri recti MN (*Fig.* 118.), cujus altitudo EF baſeos diametrum LN adaequet, ſuperficies integra ſuperficiei ſphaerae *A*BD ſit aequalis. Quoniam cylindri baſis HI eſt ſexta pars ſuperficiei ſphaericae, ſphaerae autem circulus maximus *A*BCD eſt ejuſdem ſuperficiei pars quarta, cylindrus MN erit ad ſolidum ex dicto circulo ABCD ducto in $\frac{2}{3}$ EF, ut $\frac{1}{6}$ EF ad $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ EF, nempe in ratione aequalitatis. Sed ſphaera ABD aequatur producto ſui circuli maximi ABCD in $\frac{2}{3}$ *A*C, atque *A*C > EF (ſecus cylindri ſuperficies foret major ſuperficie ſphaerae contra hypotheſim); ergo ſphaera *A*BD, quae eſt major ſolido ex circulo ABCD ducto in $\frac{2}{3}$ EF, erit etiam major cylindro MN. Jam vero cylindrus MN eſt omnium cylindrorum ſub aequali ſuperficie maximus (232); ergo &c.

THEOREMA XXXVI.

259. *Sphaera prae ſolidis omnibus ipſi aequalibus minima ſuperficie circumcluditur.*

Dem. Quoniam polyedrum ſphaerae inſcriptum eſt ſphaera minus, circumſcriptum verò majus, ſi polyedrum ſphaerae aequale habeat cum ea centrum magnitudinis commune; patet, quaelibet plana ejus ſuperficiem componentia ſphaerae ſuperficiem ſecare debere. Diviſo itaque polyedro in pyramides, & ſphaera in totidem ſectores reſpondentes, quorum vertices in communi centro coëant, ſit DIEC (*Fig.* 119) una ex dictis pyramidibus, cui reſpondeat aequalis ſector AHBC. Perſpicuum eſt, pyramidis altitudinem CI minorem eſſe debere ſphaerae radio CH, qui ſectoris ſphaerici eſt altitudo. Eſt autem (*per hyp.*) baſis ſectoris ABC ad baſim pyramidis DEC, ut CI ad CH; ergo ſectoris ſphae-

rici baſis erit minor baſi pyramidis reſpondentis; quod quum de omnibus ſectorum ſphaericorum baſibus comparate ad omnes reſpondentes pyramidum baſes ſemper contingat, erit ſphaerae ſuperficies *minor* ſuperficie polyedri cujuslibet ipſi aequalis.

Praeterea ſphaera minimam prae cylindro quocumque ipſi aequali ſuperficiem habet (257.); ſed cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, minimam prae omnibus cylindris, priſmaris, conis rectis, ac pyramidibus regularibus ipſi aequalibus exhibet integram ſuperficiem (255.); ergo &c.

THEOREMA XXXVII.

260. *Solidorum omnium ſub aequali ſuperficie integra maximum, ſeu capaciſſimum eſt ſphaera.*

Dem. Si polyedrum ſit ſphaerae concentricum, quaecumque plana polyedri ſuperficiem efficientia ſphaericas portiones reſpondentes aliquo modo ſecabunt. Dividantur polyedrum in pyramides, ac ſphaera in totidem ſectores reſpondentes, ſitque DIFC (*Fig.* 119.) una ex pyramidibus polyedrum conſtantibus, cui reſpondeat ſector AHBC. Liquet, pyramidis altitudinem CI eſſe minorem ſphaerae radio CH, qui eſt ſectoris ſphaerici altitudo. Sed ob aequales baſes ſector eſt ad pyramidem in ratione altitudinum; ergo ſector ſphaericus eſt major pyramide & ita ſemper; quamobrem tota ſphaera erit *major* polyedro aequalem cum ipſa ſuperficiem habente.

Inſuper ſphaera quorumcumque cylindrorum aequalibus cum ipſa ſuperficiebus integris affectorum eſt maxima (258.), ſed cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, eſt omnium cylindrorum, priſmatum, conorum rectorum, ac pyramidum regularium ſub aequali ſuperficie integra maximus (256.); ergo &c.

DE

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATIS

PARS SECUNDA

LIBER IV.

De Solidis

Solidis inſcriptis, & circumſcriptis

THEOREMA I.

261. *Ex omnibus ſuperficiebus convexis cylindrorum cono recto inſcriptorum, illa, cujus altitudo altitudinis conicae dimidium adaequat, eſt* maxima.

Dem. Triangulum rectangulum, ex cujus revolutione circa axem conus rectus datus oritur, ſit ABC (*Fig.* 120.) & DH, FI ſint rectangula cylindros in revolutione circa axem AB gignentia, quorum FI habeat altitudinem FB ſubduplam altitudinis conicae AB. Superficies cylindrica convexa genita a rectangulo FI eſt ad ſuperficiem convexam genitam a rectangulo DH, ut rectangulum FI ad rectangulum DH; ſed FI > DH (110.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

262. Data quaelibet ſuperficies cylindrica convexa evadere poteſt *maxima* prae omnibus ſuperficiebus cylindricis convexis, quae cono alicui poſſunt inſcribi. Ete-

 nim

nini ſi dicta ſuperficies cylindrica oriatur ex revolutione rectanguli FI circa axem FB, producta BF in *A*, ita ut ſit AF = FB, tum completo triangulo rectangulo *A*BC, cujus hypothenuſa *A*C tranſeat per angulum G rectanguli FI, triangulum *A*CB ſimul cum rectangulo FI in gyrum ducatur circa axem AB, data ſuperficies cylindrica convexa erit *maxima* omnium cylindricarum convexarum, quae dicto cono inſcribi poſſunt.

Corollarium II.

263. Si parallelepipeda, vel priſmata baſibus ſimilibus incumbentia dictis cylindris ex trianguli ACB circa axem AB revolutione genitis inſcribantur, idem de eorum ſuperficiebus, quod de cylindricis ſtatuimus, eſt pronunciandum.

Theorema II.

264. *Ex omnibus cylindris, qui cono recto inſcribi poſſunt, ille, cujus altitudo tertiam altitudinis conicae partem adaequat, eſt* maximus.

Dem. Eſto AbC (*Fig.* 120.) triangulum rectangulum, ex cujus circa axem converſione datus conus exurgit, poſitaque BD tertia parte altitudinis AB, ſint DH, FI rectangula, quae cum triangulo *A*BC rotata cylindros conflent. Cylindrus ex rectangulo DH erit ad cylindrum ex rectangulo FI, ut $BD.\overline{DE}^2$ ad $BF.\overline{FG}^2$, ſed $\overline{DE}^2 : \overline{FG}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{AF}^2$; ergo cylindrus ex rectangulo DH erit ad cylindrum ex rectangulo FI, ut $\overline{AD}^2.DB$ ad $\overline{AF}^2.FB$; eſt autem $\overline{AD}^2.DB$ omnium $\overline{AF}^2.FB$ maximum (143.); ergo &c.

Co-

Corollarium I.

265. Idem de priſmatis pyramidi datae inſcriptis ſentiendum eſt, Etenim ſi per puncta D, F tranſire fingamus plana baſi BC pyramidis ACB parallela, & ex omnibus punctis E, G ſectionum inde prodeuntium ducantur ad dictam baſim omnes EH, GI altitudini AB parallelae, orientur priſmata, quorum *maximum* erit illud, cuius altitudo BD tertiam altitudinis AB partem adaequat.

Corollarium II.

266. Quilibet cylindrus evadere poteſt *maximus* cylindrorum omnium, qui cono alicui recto inſcribi poſſunt. Cylindrus enim datus oriatur ex revolutione rectanguli DO circa axem DB, producta BD in A, ita ut ſit AB tripla rectae BD, & juncta AL, quae protrahatur in M ad occurſum cum latere producto BO, ſi concipiatur, triangulum rectangulum ABM rotari circa axem AB, generabitur conus, in quo cylindrus ex DO erit *maximus*. Idem de priſmate quolibet aſſeri poteſt ratione habita ad pyramidem, dummodo in ſingulis priſmatis baſium ſimilitudo ſervetur.

Corollarium III.

267. Itaque ſi circa eandem altitudinem AB, cujus BD ſit pars tertia, fuerint plures trianguli rectanguli ABC ABM, ABT, &c. ductiſque baſi BT parallelis DS, FR ſecantibus latera AC, AM, AT, &c. in punctis G, E, K, L, R, S, &c. ponantur omnia triangula revolvi circa axem AB, liquet, aggregatum cylindrorum ex rectangulis DH, DO, DQ, &c. eſſe *majus* aggregato cylindrorum ex rectangulis FI, FN, FP, &c. Idem quoad priſmata pyramidibus rectis haſes ſimiles ſub aequali altitudine habentibus inſcripta, ut ſupra (265.) monuimus, intelligendum.

Corollarium IV.

268. Quae hactenus de cylindris demonſtravimus (264. 266.

266. 267.) locum obtinent etiam in conis cono recto inſcriptis, ſed verticem deorſum in centro baſeos coni, cui inſcribuntur, habentibus. Sic inter omnes conos ex triangulis BED, BGF cono ex triangulo ABC inſcriptos, & vertices in baſeos centro B ejuſdem coni figentes, conus BED, cujus altitudo BD ſubtriplum adaequat altitudinis AB, eſt *maximus*, quod ad pyramides baſibus ſimilibus inſtructas, & conis hiſce ſic inſcriptibiles, quin etiam ad pyramides pyramidibus eodem modo inſcriptas, extenditur.

Corollarium V.

269. Triangulum ABC (*Fig.* 121.) repraeſentet conum, cui ſit inſcriptus maximus cylindrus DG. Habemus $AH : AI = BC : DE = 3 : 2$; ſed cylindrus KC eandem habens cum cylindro DG altitudinem, & eandem baſim cum cono ABC, eſt eidem cono aequalis; ergo cylindrus DG eſt ad conum ABC, ut $\overline{DE}^2$ ad $\overline{BC}^2$, hoc eſt ut 4 ad 9; quod quum valeat de omnibus cylindris maximis, qui conis inſcribuntur, cylindri iſti erunt hujuſmodi conis proportionales.

Corollarium VI.

270. Ducta ex puncto C (*Fig.* 120.) ad AB protracta recta qualibet CX, tum productis EH, GI uſque ad ejuſdem CX occurſum in punctis V, Z, compleantur rectangula HY, IW. Quoniam $AB : BD = AC : CE = BC : CH = BX : BY$, erit $BY = \frac{1}{3} BX$, adeóque ſi imaginemur, triangulum BCX revolvi circa axem BX, cylindrus ex rectangulo HY erit prae omnibus cylindris ex ceteris rectangulis IW *maximus*, quod brevius per *num.* 145. evincitur. Quocirca ſi triangulum quodvis ACX, ex cujus vertice C cadat in baſim non protenſam normalis CB, concipiatur rotari circa dictam baſim AX, inter omnes cylindros ex rectangulis quibuſcumque triangulo

ipſi

ipſi inſcriptis, ac ſecum circumactis prodeuntes, ille, in quo baſeos radius duas tertias partes occupat altitudinis ejuſdem trianguli, erit *maximus*.

THEOREMA III.

271. *Inter omnes cylindros conis omnibus rectis aequali ſuperficie integra rectis inſcriptis; ille, cujus altitudo ſubduplum poteſt diametri baſeos, eſt* maximus.

Dem. Finge, cylindrum, cujus altitudo diametri baſeos ſit potentia ſubdupla, eſſe coni alicujus recti maximum inſcriptum; atque horum ſectio communis per axem ſit figura conſtans ex triangulo iſoſcele ABC (*Fig.* 121.), & rectangulo DG ipſi inſcripto. Erit AI dupla HI (264.), adeoque $\overline{AI}^2 = 4\overline{HI}^2$. Sed (*ex hyp.*) $\overline{HI}^2 = \frac{1}{2}\overline{DE}^2$, ſive $4\overline{HI}^2 = 2\overline{DE}^2$; ergo $\overline{AI}^2 = 2\overline{DE}^2$, ac proinde $\overline{AH}^2 = 2\overline{BC}^2$. Conus igitur rectus, cujus ſectio per axem triangulum ABC, eſt omnium conorum rectorum ſub aequali ſuperficie integra maximus (246.). At cylindri maximi ſunt ut coni, quibus inſcribuntur (269.); ergo cylindrus, cujus ſectio rectangulum DG, eſt omnium cylindrorum maximorum conis rectis ſub aequali ſuperficie integra inſcriptorum, adeoque & ceterorum *maximus*. Q. E. D.

THEOREMA IV.

272. *Solidis omnibus conicis ex triangulorum iſoſcelium circa baſes circumactu coortis, & ſuperficies aequales habentibus, cylindri recti concipiantur circumſcripti. Inter hujuſmodi ſolida ſit* ABPC (Fig. 121.) *prodiens ex rotatione trianguli iſoſcelis ABP circa baſim AP, quae octuplum poſſit altitudinis* BH; *dico, cylindrum rectum huic ſolido circumſcriptum eſſe reliquorum* maximum.

Dem. Solido ABPC in duos conos rectos ABC, PBC ſimiles & aequales ſecto, nec non ceteris conis eodem modo diviſis, quum conorum ABC, PBC altitudines AH, PH duplum ſingulae poſſint baſeos radij BH, iſti coni aggregatum maximum component (242.); ſed cylindri ſunt conis, quibus circumſcribuntur, proportionales, ergo &c.

THEOREMA V.

273. *Inter omnes cylindros ſolidis quibuſcumque aequalibus a triangulorum iſoſcelium circa baſim rotatione genitis circumſcriptos; rectus ille, qui rhombo conico, ſeu ſolido conico altitudinem latitudini aequalem habenti, circumſcribitur,* minima *operitur integra ſuperficie.*

Dem. Cylindri ſolidis hiſce conicis circumſcripti ſunt ut ipſa ſolida, ac proinde aequales, ſed cylindrus rhombo conico circumſcriptus altitudinem latitudini, ſeu baſeos diametro, aequalem habet; ergo ex dictis (230.) res patet.

Corollarium

274. Si ſolida iſta conica bifariam per latitudinem, ut diximus, dividantur; inter omnes cylindros conis aequalibus inde prodeuntibus circumſcriptos, ille, qui cono altitudinem ſubduplam diametri baſeos habenti circumſcribitur, *minimo* praeditus eſt aggregato ex alterutra baſi & ſuperficie convexa. Et viciſſim inter omnes conos cylindris ſuperficies convexas ſimul cum alterutra ex baſibus aequales habentibus inſcriptos, ille, cujus altitudo eſt ſubdupla diametri baſeos, eſt *maximus*.

THEOREMA VI.

275. *Si triangulum rectangulum* ABC (Fig. 122.) *diviſum in omnia inſcripta rectangula* DH, FI *concipiatur revolvi circa* PQ *normali* AB *parallelam, ita ut innumeri oriantur cylindri recti concavi a dictorum rectangulorum*

lorum revolutione geniti; ajo cylindrum illum concavum ex rectangulo DH, cujus baſis BH ita ſecat BC in H, ut ſit $\overline{CH}^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2$, eſſe maximum.

Dem. Protracta BC in N, ut ſit CN = BC, ſupra BN deſcribitur ſemicirculus BPN, & GI, EH producantur uſque ad occurſum circumferentiae in punctis M, L. Conſtat, cylindrorum concavorum ex rectangulis FI, DH baſes eſſe inter ſe, ut $\overline{BC}^2 - \overline{IC}^2$ ad $\overline{BC}^2 - \overline{HC}^2$, hoc eſt ut rectang. BIN ad BHN, ſive ut $\overline{IM}^2$ ad $\overline{HL}^2$. Ergo cylindri concavi ex rectangulis FI, DH erunt invicem, ut $\overline{IM}^2 . IG$ ad $\overline{HL}^2 . HE$, ſive ut $\overline{IM}^2 . IC$ ad $\overline{HL}^2 . HC$. Sed ſi $\overline{CH}^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2$, productum $\overline{LH}^2 . HC$ eſt maximum (156.); ergo cylindrus concavus ex circumactu dicti rectanguli DH eſt *maximus*. Q. E. D.

Corollarium

276. Producta *AB* quomodocumque in O, junctaque OC, ſi fingamus, triangulum ACO revolvi ut ſupra circa PQ, ſemper verum reperietur, cylindrum concavum a rectanguli DR (cujus latus ER ita abſcindit rectam *CB*, ut ſit $\overline{CH}^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2$) revolutione genitum, eſſe *maximum*.

Theorema VII.

277. *Inter omnes cylindros haemiſphaerio inſcriptos, ille, cujus altitudo radij ſubtriplum poteſt, eſt* maximus.

Dem. Eſto ABC (*Fig.* 123.) quadrans, cujus radius CB

CB ita ſecetur in F, ut ſit $\overline{CF}^2 = \frac{2}{3}\overline{CB}^2$; completo rectangulo DF, & inſcripto quadranti quovis alio rectangulo HG, fac, ut quadrans circa radium AC revolvatur. Cylindrus ex rectangulo DF erit ad cylindrum ex rectangulo HG, ut $\overline{CF}^2 . FE$ ad $\overline{CG}^2 . GI$; ſed $\overline{CF}^2 . FE > \overline{CG}^2 . GI$ (148.); ergo cylindrus ex rectangulo DF eſt *maximus*; eſt autem $\overline{FE}^2 = \frac{1}{3}\overline{CB}^2$ (*per dem. l. cit.*) ergo &c.

Corollarium

278. Ergo *maximus* quoque cylindrus ſphaerae inſcriptus haberi facile poteſt; id autem ex *num.* 151. ictu oculi obtinetur.

THEOREMA VIII.

279. *Inter omnes cylindros ſphaerae inſcriptos, ille, cujus altitudo radij ſphaerae duplum poteſt*, maxima *obvolvitur convexa ſuperficie.*

Dem Eſto ABC (*Fig.* 124.) ſemicirculus, ex cujus circa diametrum AC revolutione prodeat ſphaera; ſumptiſque hic inde a centro O rectis aequalibus OD, OL, ita ut LD radij AO duplum poſſit, completoque rectangulo inſcripto DF, aliud quodvis rectangulum HG eidem ſemicirculo inſcribatur. Erit rectangulum DF dimidium quadrati circulo inſcripti, quare ſi dictus ſemicirculus circa diametrum AC in orbem ducatur, cylindri a rectangulo DF geniti ſuperficies convexa erit ad ſuperficiem convexam cylindri geniti a rectangulo HG, ut rectangulum DF ad rectangulum HG; ſed DF > HG (131.), ergo &c.

THEOREMA IX.

280. *Inter omnia parallelepipeda, vel priſmata ejuſ-*

dem

dem generis cylindris aniverſis aequali ſuperficie integra praeditis inſcripta; regulare illud, quod cylindro recto baſeos diametrum altitudini aequalem habenti inſcribitur, eſt maximum.

Dem. Cylindrus rectus, cujus altitudo baſeos diametrum adaequat, eſt omnium cylindrorum ſub aequali ſuperficie integra maximus (232.). Parallelepipeda, vel priſmata ejuſdem generis cylindris inſcripta, baſibusque ſimilibus inſiſtentia, ſunt ut cylindri, quibus inſcribuntur; adeoque inter huiuſmodi parallelepipeda, vel priſmata, illud, quod cylindro recto altitudinem baſeos diametro aequalem habenti inſcribitur, eſt *maximum*. Sed inter parallelepipeda, vel priſmata eiuſdem generis huic cylindro inſcripta, regulare eſt maximum (177.), ergo &c.

THEOREMA X.

280. *Inter omnia ejuſdem generis parallelepipeda, vel priſmata regularia cylindris rectis aequalibus inſcripta; illud, quod altitudinem habet duplam radij a centro polygoni (baſim parallelepipedi, vel priſmatis efficientis) ad ejaſdem polygoni latus aliquod normaliter educti,* minimo *obducitur integra ſuperficie.*

Dem. Omnia hujuſmodi parallelepipeda, vel priſmata habent baſes baſibus cylindrorum proportionales, adeoque, ob altitudines aequales altitudinibus cylindrorum aequalium, ſunt & ipſa invicem aequalia. Sed inter omnia parallelepipeda, vel priſmata aequalia, regulare illud, cujus altitudo eſt dupla radij a centro baſeos ad unum ex eiuſdem lateribus normaliter educti, minima ſuperficie integra comprehenditur (231.); ergo &c.

THEOREMA XI.

282. *Ex omnibus conis, qui dato ſegmento ſphaerico inſcribi poſſunt, rectus eſt* maximus.

Dem. Segmento ſphaerico ABCD (*Fig.* 125.) inſeri-

bantur

bantur conus rectus ABCD, & obliquus quilibet EBCD; deinde per verticem A coni recti ABCD tranſeat planum FG tangens ſphaeram; cum ſupra eandem baſim BCD concipiatur conus obliquus HBCD, in quo minima ſuperficiei longitudo HD conveniat cum minima longitudine ED ſuperficiei coni EBCD, cujuſque vertex H ſit in plano FG. Cum ABCD, HBCD ſub eadem baſi, & altitudine ſunt aequales; ſed conus HBCD eſt major cono comprehenſo EBCD; ergo conus ABCD eſt *major* cono EBCD. Q. E. D.

THEOREMA XII.

283. *Ex omnibus conis rectis ſphaerae inſcriptis, ille, cujus altitudo duas tertias diametri partes occupat, ſeu cujus altitudo baſeos radij duplum poteſt*, maxima *ſuperficie convexa tegitur.*

Dem. Semicirculus, ex cujus circa diametrum revolutione data ſphaera progignitur, ſit ACEB (*Fig.* 77.), ſumptaque in diametro AB recta AD dupla remanentis DB, ex punctis D, F excitentur ad circumferentiam normales DC, FE, junctiſque AC, AE, rotetur figura circa diametrum AB. Superficies convexa coni ex triangulo ADC eſt ad ſuperficiem convexam coni ex triangulo AFE, ut AC . CD ad AE . EF; ſed AC . CD > AE . EF (142.); ergo &c.

THEOREMA XIII.

284. *Ex omnibus conis ſphaerae inſcriptis, ille, cujus altitudo duas tertias diametri partes continet, ſive ille, cujus altitudo duplum poteſt radij baſeos, eſt* maximus.

Dem. Eadem fig. 77. (ut in *Theor. antec.*)) conſtructione retenta, liquet, conum rectum ex triangulo ADC eſſe ad conum rectum ex triangulo AFE, ut $AD . \overline{DC}^2$ ad

ad $AF . \overline{FE}^2$; ſed $AD . \overline{DC}^2 > AF . \overline{FE}^2$ (144.); ergo conus ex triangulo ADC, cujus altitudo AD duplum poteſt baſeos radii DC, eſt *major* cono quovis *ex* triangulo AFE. Conus autem ex triangulo AFE eſt *major* quocumque cono obliquo, qui eidem ſegmento ſphaerico inſcribi poteſt (282.); ergo &c.

THEOREMA XIV.

285. *Ex omnibus conis rectis haemiſphaerio inſcriptis, ac vertices in centro habentibus, ille, in quo altitudo radii ſphoerae ſubtriplum poteſt, eſt* maximus.

Dem. Eſto circuli quadrans AEBC (*Fig.* 123.), cuius radio AC ita ſecto in D, ut ſit $3\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$, excitentur ex D, & ex alio quovis puncto H ad circumferentiam normales DE, HI; tum junctis CE, CI, imaginare, figuram rotari circa axem AC. Ex triangulis cum quadrante rotatis CED, CIH coni orientur habentes pro ſuperficiei convexae longitudinibus radios CE, CI, adeoque ſuperficiei convexae longitudines erunt aequales; ſed $\overline{CE}^2 = \overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = 3\overline{CD}^2$; ergo erit $\overline{DE}^2 = 2\overline{CD}^2$; ille autem ex omnibus conis rectis ſuperficiei convexae longitudines aequales habentibus eſt maximus, in quo baſeos radius duplum poteſt altitudinis (248.). ergo &c.

THEOREMA XV.

286. *Ex omnibus conis rectis cylindro recto circumſcriptis, ille, cujus altitudo triplam inſcripti cylindri altitudinem adoequat, eſt* minimus.

Dem. Cylindro recto AB (*Fig.* 126.) circumſcribantur coni recti CDE, FGH, ſitque coni CDE altitudo CI tripla altitudinis KI cylindri inſcripti AB. Unuſquiſque conus

nus eſt ad maximum inſcriptum cylindrum in ratione conſtanti, nimirum ut 9 ad 4 (269.); ſed cylindrus *AB* eſt maximus cylindrorum cono CDE inſcriptorum (264.), & non maximus cylindrorum cono FGH inſcriptorum, ergo conus CDE cylindro *AB* minorem habebit rationem quam conus FGH, adeoque conus CDE *minor* erit cono FGH, & ita ſemper Q. E. D.

T H E O R E M A XVI.

287. *Ex omnibus conis rectis circumſcriptis cylindro* DG (Fig. 121.) *altitudinem* HI *talem habenti, ut duplum ejus quadrati quadratum* $\overline{DE}^2$ *diametri baſeos adaequet; ille, cujus altitudo AH ſit tripla altitudinis HI, minima afficitur integra ſuperficie.*

Dem. Quoniam AH = 3HI, erit *AI* = 2HI, & $\overline{AI}^2 = 4\overline{HI}^2 = 2\overline{DE}^2$ (*ex hyp.*), quare $\overline{AH}^2 = 2\overline{BC}^2$, adeoque conus ABC *minimam* prae omnibus aequalibus habet integram ſuperficiem (244.). Sed idem conus ABC eſt omnium conorum rectorum cylindro DG circumſcriptorum minimus (286.); ergo *minimam* potiori jure habebit prae omnibus conis rectis cylindro DG circumſcriptis ſuperficiem. Q. E. D.

T H E O R E M A XVII.

288. *Inter omnes conos rectos cylindris omnibus rectis aequalibus circumſcriptos, ille, qui inſcriptum habet maximum cylindrum ejus naturae, ut quadratum altitudinis bis ſumptum diametri baſeos quadratum adaequet, minima ſuperficie integra comprehenditur.*

Dem. Conus, qui maximum enunciatum cylindrum inſcriptum habet, praeditus eſt altitudine baſeos diametri potentia dupla (*per dem. in Theor. antec.*); quamo-

brem

brem ſi ponas, aequales cylindros eſſe conis maximos inſcriptos, coni iſti erunt aequales (269.), adeoque conus, qui cylindrum recenſitum inſcriptum habet, *minima* prae ceteris afficitur integra ſuperficie (244.). Sed ſi aequales cylindri non ſint conis maximi inſcripti, coni iſti erunt dicto cono majores (285.), ac propterea multo magis conus hicce *minima* ſuperficie integra prae iis donabitur. Quod ſi ad conos rectos dicto cylindro circumſcriptos animum convertamus, iſti *majorem* dicto cono ſuperficiem integram ſufficient (287.); ergo &c.

THEOREMA XVIII.

289. *Inter omnes conos rectos cylindris quibuſcumque rectis aequalibus circumſcriptos; ille, qui habet inſcriptum maximum cylindrum ejus naturae, ut quadratum altitudinis bis ſumptum radij baſeos quadratum adaequet*, minima *obvolvetur convexa ſuperficie*.

Dem. Conus, cui dictus cylindrus eſt inſcriptus, altitudinem habet, quae baſeos radij duplum poteſt (*per dem. ſimilem demonſtr. num.* 287.). Imaginare nunc, omnes cylindros aequales conis inſcriptos eſſe maximos. Hujuſmodi coni erunt & ipſi aequales (269.), propntereaque conus, qui cylindrum enunciatum habet inſcriptum, *minima* prae reliquis obducetur ſuperficie convexa (240.). Jam verò ſi dicti cylindri aequales non ſint maximi inſcripti coni, iſti coni erunt recenſito cono majores, adeoque iſte conus *minima* potiori jure ſuperficie convexa prae illis contegetur. Denique ſi omnes coni recti ſtatuto cylindro circumſcripti ad examen revocentur, conus ille, cui maximus hic cylindrus inſcribitur, erit omnium minimus (286.), ac proinde *minima* multo magis ſuperficie convexa afficietur (240.); ergo &c.

THEO-

THEOREMA XIX.

290. *Triangulo iſoſceli ABP* (Fig. 121.), *cujus altitudo* BH, *ſit inſcriptum rectangulum* DQ *altitudinis* IH $=$ $\frac{2}{3}$ BH, *ac poſtmodum revolvatur figura circa baſim AP, ut oriatur ſolidum conicum* ABPC *cylindro* DN *circumſcriptum; ajo, ex omnibus ſolidis conicis ſic enatis, eidem cylindro* DN *circumſcriptis, & contactus velut* B, C *cum planis tam ultra, quam citra plana* RCS, TBV (*parallela plano per dictam baſim* AP *ad angulos rectos cum altitudine* BH *tranſeunti*) *habentibus, ſolidum recenſitum* ABPC *eſſe* minimum.

Dem. Cylindrus DN eſt maximus inſcriptus ſolido conico *ABPC* (270.), adeoque non maximus inſcriptus ſolidis conicis eidem cylindro circumſcriptis, & ex triangulorum iſoſcelium revolutione conſurgentibus; quare ſolidum ABPC ad cylindrum DN minorem habebit rationem quam quodvis aliud nominatum ſolidum conicum, ac proinde ſolidum *ABPC* erit ex iis omnibus *minimum*. Sed per ea quae num. 117. demonſtrata fuere, omnia hujuſmodi ſolida cylindro DN circumſcripta, quae aequales habent latitudines, quaeque a triangulis iſoſcelis ortum non ducunt, ſunt ſingula aequalia ſolido a triangulo iſoſcele aeque alto genita; ergo &c.

THEOREMA XX.

291. *Si triangulo iſoſceli* ABP (Fig. 121.) *ſit inſcriptum rectangulum* DQ *ejus naturae, ut altitudinis* IH *quadratum bis ſumptum baſeos diametri* IQ *quadratum adaequet, ac deinde figura circa baſim* AP *tanquam axem revolvatur; non ſolum ex omnibus ſolidis conicis ex triangulorum quorumcumque revolutione prodeuntibus, ac cylindro eidem* DN *circumſcriptis, ſed ex omnibus quoque hujuſmodi ſolidis circumſcriptis cylindro cuilibet aequali* *cylin-*

cylindro DN, *ſolidum* ABPC *minima operietur ſuperficie*.

Dem. Si triangula rectangulo DQ circumſcripta, unàque cum ipſo circa baſes rotata ſint iſoſcelia, ex dictis (289.) res patet, ſolidum enim ABPC conſtat duobus conis aequalibus, & ſimilibus ABC, PbC minima ſuperficie convexa praeditis, eidemque baſi perfecte adhaerentibus. Si dicta triangula ſint ſcalena, conſiderentur duo triangula aeque alta rectangulo DQ circumſcripta, quorum alterum ſit iſoſceles, iſtud, baſi etiam excepta, minimam habebit perimetrum (117.); quamobrem inſtituta, ut ante, hujuſmodi triangulorum circa baſes revolutione, ſuperficies ſolidi conici a triangulo iſoſcele geniti erit *minima*, ſuperficies enim iſtae ſunt ut dictae triangulorum rotatorum perimetri, baſibus non computatis.

Idem demonſtrabitur in ſolidis omnibus conicis cuilibet cylindro cylindrum DN adaequante circumſcriptis. Sed ſolidi conici ABPC ſuperficies a triangulo ABP ſtatutae conditionis circa baſim AP revoluto genita eſt minor ſuperficie ſolidorum quorumcunique tam cylindro DN, quam cylindris ipſi aequalibus circumſcriptorum, & a triangulis iſoſceliis circa baſes revolutis effectorum (289.), ergo &c.

THEOREMA XXI.

292. *Ex omnibus ſolidis conicis ſphaerae inſcriptis, rhombus conicus maxima cum ſuperficie, tum ſoliditate pollet.*

Dem. Ponatur, ſemicirculum ACFI (*Fig.* 69) habentem inſcripta triangula quotlibet ACI, AFI, quorum AFI ſit iſoſceles, rotari circa diametrum AI. Superficies ſolidorum conicorum ſphaerae hinc emergentis inſcriptorum erunt ut $(AF + FI).FG$, $(AC + CI).CH$; ſed $AF + FI > AC + CI$ (128.) & $FG > CH$, ergo rhombus conicus a triangulo iſoſcele AFI circumacto genitus *maximam* ſuppeditat ſuperficiem; *quod erat primum*.

Rhombus conicus maximam prae ceteris ſolidis habet

latitudinem ſub communi altitudine AI, ut patet; ergo erit omnium hujuſmodi ſolidorum *maximus*, ſingula enim iſta ſolida dividuntur in duos conos baſibus aequalibus praeditos, *quod erat ſecundum*.

THEOREMA XXII.

293. *Ex omnibus conis haemiſphaerio circumſcriptis, ille, cujus altitudo radij baſeos duplum poteſt*, minimam *habet ſuperficiem convexam*.

Dem. Hujuſmodi conorum, & inſcripti haemiſphaerij ſectio communis per axem repraeſentetur per triangula iſoſcelia ABD, EFG (*Fig.* 127.), ac per ſemirculum inſcriptum MRN, trianguli vero *ABD* altitudo AC duplum poſſit baſeos dimidiae CB. Contactum H, L punctis H, L junctis cum centro C per radios HC, LC, quoniam triangula rectangula ABC, EFC habent aequales perpendiculares ex vertice communi C in hypothenuſas *AB*, EF demiſſis, erit AB . *BC* < EF . FC (154); ſed in eadem ratione ſunt ſuperficies convexae conorum ex triangulorum ABC, EFC circa axem AC revolutione genitorum; ergo conus ex triangulo ABC *minorem* habet quam conus ex triangulo EFC ſuperficiem convexam. Q. E. D.

THEOREMA XXIII.

294. *Ex omnibus conis haemiſphaerio circumſcriptis, ille, cujus altitudo radij baſeos duplum poteſt, eſt* minimus.

Dem. Sint coni ABD, EFG (*Fig.* 127.) haemiſphaerio MLN circumſcripti, atque in cono ABD ſit $\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$. Erit primus conus ad alterum, ut AC . $\overline{CB}^2$ ad EC . $\overline{CF}^2$, ſive ut *AB* . BC . CH ad EF . FC . CL, ſive ob CH = CL, ut AB . BC ad EF . FC; ſed AB . BC < EF . FC (154), ergo conus ABD *minor* cono EFG. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA XXIV.

295. *Circumſcriptis ſemicirculo* PMT (Fig. 129.) *quibuſcumque triangulis* ABR, WXZ, *inter quae iſoſceles* ABR *habeat baſim* AR *altitudini* BG *potentia octuplam, ſi tota figura circa axem* AR *in orbem agatur; ex omnibus ſolidis conicis ſphaerae circumſcriptis hinc exurgentibus, illud, quod a triangulo* ABR *progignitur, minima tam ſuperficie, quam ſoliditate comprehenditur.*

Dem. Si triangula ABR, WXZ ſint iſoſcelia, ex antecedentibus (293. 294.) res patet. At ſi hujuſmodi triangulorum alterum WXZ ſit ſcalenum, ponamus, hoc aequalem habere cum triangulo iſoſcele ABR altitudinem. Quoniam triang. ABR ∢ WXZ (159.), erit AB † BR ∢ WX † XZ (*ibid.*), adeoque ſuperficies ſolidi ex triangulo iſoſcele ABR erit *minor* ſuperficie ſolidi ex triangulo ſcaleno WXZ; & ſic de ceteris. Ergo *patet primum.*

Similiter ſi ſtatuatur, triangulum quodvis ſcalenum WXZ circumagi ut ſupra cum triangulo iſoſcele ABR aequali altitudine BG affecto, ob triang. ABR ∢ WXZ erit AR ∢ WZ, ac proinde ſolidum ex triangulo iſoſcele ABR erit *minus* ſolido ex triangulo ſcaleno WXZ, & ſic ſemper. Ergo *patet ſecundum.*

LEMMA

296. *Solida quaecumque ita ſphaerae circumſcripta, ut omnia plana, queis terminantur, ſphaeram tangant, ſunt ſuis ſuperficiebus proportionalia.*

Dem. Sphaerae HMN (*Fig.* 128.), cujus centrum C, radius CH, concipe circumſcriptum ſolidum planis quotcumque, & quibuſcumque ſphaeram tangentibus terminatum, quorum unum ſit ABD. Per hujus latera AB, AD, BD traducantur totidem plana per centrum C tranſeuntia, & ſic de ceteris. Totum ſolidum in tot pyramides, quot ſunt plana ABD illud undique claudentia

I 2 re-

reſolvetur, quae pyramides quum vertices habeant in centro C, eadem omnes altitudine CH gaudebunt. Aggregatum igitur omnium pyramidum, hoc eſt ſolidum ipſum circumſcriptum, erit aequale producto ex tota ſua ſuperficie in radii trientem. Idem demonſtrabitur de quovis alio ſolido ſphaerae eidem HMN circumſcripto; quare liquet, hujuſmodi ſolida eſſe invicem, ut eorum ſuperficies. Q. E. D.

C o r o l l a r i u m

297. Vi ejuſdem ratiocinii liquet, ſolidum quodvis ſphaerae dicta conditione circumſcriptum eſſe ad eandem ſphaeram, ut illius ad hujus ſuperficiem.

T H E O R E M A   XXV.

298. *Ex omnibus conis ſphaerae circumſcriptis, ille, cujus altitudo duplam ſphaerae inſcriptae diametrum adaequat, vel cujus altitudo diametri baſeos duplum poteſt, tam ſoliditatem, quam ſuperficiem minimam habet.*

Dem. Coni CDE (*Fig.* 126.), cujus altitudo CI, & ſphaerae ipſi inſcriptae AINM, cujus diameter IM = MC, ſectio per axem ſit DCE. Si in latere CD ſumatur AD = DI, & ex A erigatur normalis AP occurrens altitudini CI in P, patet, ſemicirculum triangulo CID inſcriptum tranſire per puncta I, A, M, & P eſſe ipſius centrum. Praeterea quum triangula ſimilia CAP, CID exhibeant CP : PA = CD : DI, ſitque CP tripla PA, erit CD tripla tam DI, quam DA, ex quo prodit $\overline{CI}^2 = 8\overline{DI}^2 = 2\overline{DE}^2$. Triangulo CID inſcribe rectangulum AKIL, quod ex altitudine CI tertiam reſcindet partem KI; quare tota figura circa axem CI in orbem ducta, exurget conus CDE, in quo locus contactuum tam ſphaerae, quam cylindri erit eadem circumferentia ambiens cylindri baſim, cujus diameter AN. Eſt autem AP > AK, ergo ſphae-

ſphaera *AINM* ſecat cylindrum *AB*, propterea que conorum ſphaerae *AINM* circumſcriptorum longitudines, excepta CD, cadent extra dictum locum contactuum, adeoque coni iſti erunt ſemper majores conis reſpondentibus, qui cylindro *AB* ſub eadem altitudine, vel ſub eadem baſi circumſcribuntur. Sed conus CDE eſt ex omnibus conis cylindro *AB* circumſcriptis minimus (286) ergo *minimus* erit potiori jure omnium conorum ſphaerae circumſcriptorum, *quod erat primum*, quodque etiam per *num.* 173. 174. oſtendi poterat.

Solidorum ſphaerae circumſcriptorum ſuperficies ſunt ut ipſa ſolida (296), ſed coni haberi poſſunt pro pyramidibus, quarum baſes ſint polygona regularia lateribus ſumme exiguis conflata, ex quo fit, ut triangulis anguſtiſſimis extra baſes illae contegantur; ergo quum omnia iſta triangula ſphaeram contingant, conorum ſphaerae circumſcriptorum ſuperficies erunt ut ipſi coni, adeoque conus altitudine dupla diametri ſphaerae inſcriptae praeditus *minima* ſuperficie integra clauditur, *quod erat ſecundum*.

THEOREMA XXVI.

299. *Inter omnia haemiſphaeria conis aequali ſuperficie convexa obductis inſcripta, illud, quod cono altitudinem potentia duplam radii baſeos habenti inſcribitur, eſt maximum.*

Dem. Triangula AGB, DHE (*Fig.* 129. 130.) rectangula in G, H, quibus quadrantes circulares IMP, LNQ ſint inſcripti, habeant producta AB. BG, DE. EH invicem aequalia, & in triangulo AGB ſit $\overline{AG}^2 = 2\overline{GB}^2$. Quadrans IMP major erit quadrante LNQ (154); ergo figuris hiſce circa axes AG, DH rotatis, haemiſphaerium IMPK cono ABC inſcriptum *majus* erit haemiſphaerio LNQO cono DEF inſcripto, atque iſti coni ſuperficiebus curvis aequalibus gaudebunt. Q.E.D.

THEOREMA XXVII.

300 *Inter omnia haemiſphaeria conis aequalibus inſcripta, illud, quod cono altitudinem potentia duplam radij baſeos habenti inſcribitur, eſt* maximum.

Dem. Triangula *A*GB, DHE (*Fig.* 129. 130.) rectangula in G, H, habeant $AG.\overline{BG}^2 = DH.\overline{EH}^2$, & in triangulo AGB ſit $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$. Demiſſis ex angulis rectis G, H ſuper hypothenuſas *A*B, DE normalibus GM, HN, propter $AG.\overline{BG}^2 = DH.\overline{EH}^2$, erit etiam AB. BG. GM = DE. EH. HN; ex quo DE. EH : AB. BG = GM : HN. Eſt autem DE. EH > *AB*. BG (240.); ergo GM > HN; ſed GM, HN ſunt radij haemiſphaeriorum conis *A*BC, DEF inſcriptorum, ſi triangula AGB, DHE circa axes *A*G, DH una cum quadrantibus GPI, HQL revolvi concipiantur; ergo &c.

THEOREMA XXVIII.

301. *Inter omnes ſphaeras* PMTK, QNVO (Fig: 129. 130.) *ſolidis quibuſcumqae conicis* ABRC, DESF *tam aequalibus, quam ſuperficies aequales habentibus, & ex triangulorum* ABR, DES *circa baſes* AR, DS *circumactu coortis, inſcriptas; illa, quae inſcribitur ſolido* ABRC *genito a triangulo iſoſcele* ABR *rotato circa baſim* AR *potentia aequalem octuplo altitudinis* BG, *eſt* maxima.

Dem. Si triangula ABR, DES ſemicirculis PMT, QNV circumſcripta ſint iſoſcelia, ex dictis (299. 300.) res patet. Sin autem non ſint iſoſcelia, aſſumatur triangulum quovis ſcalenum WXZ (*Fig.* 129.) ſemicirculo PMT haemiſphaerij biſſectione orto circumſcriptum, aequalem habens cum iſoſcele aliquo *A*BR altitudinem. Quoniam triang. WXZ > ABR (159.), erit WZ > AR, adeo-

adeoque ſolidum conicum ex triangulo WXZ erit majus ſolido conico ex triangulo ABR; quamobrem ut ſtet hypotheſis, primum ſolidum imminui debet, ac proinde ſphaera ipſi inſcripta debet eſſe minor ſphaera PMTK. Idem multò magis eveniet in *fig.* 130; ergo ſi ſolida conica ſint aequalia, ſphaera ſolido conico ABRC allata proprietate praedito inſcripta erit *maxima; quod erat primum.*

Semicirculo PMT (*Fig.* 129.) circumſcribitur, ut ſupra, triangulum quodvis ſcalenum WXZ aequali gaudens cum alio iſoſcele ABR altitudine. Ob triang. WXZ > ABR, erit WX + XZ > AB + BR (159.), quocirca ſuperficies ſolidi ex triangulo WXZ erit major ſuperficie ſolidi ex triangulo ABR, ad hypotheſim igitur ſervandam, oportet, ut ſolidum ex triangulo WXZ minus evadat, ex quo ſequitur, ſphaeram huic ſolido inſcriptam *minorem* eſſe debere quam ſphaera PMTK; *quod erat ſecundum.*

C o r o l l a r i u m

302. Hinc inter univerſa ſolida conica modo expoſito genita ABRC, DESF (*Fig.* 129. 130.) ſphaeris aequalibus PMTK, QNVO, vel ſphaerae eidem circumſcripta; illud ABRC, quod prodit ex trianguli iſoſcelis ABR rotatione circa baſim AR potentia aequalem octuplo altitudinis BG, *minimam* cum ſoliditatem, tum ſuperficiem exhibebit.

L E M M A.

303. *In duabus ſolidis ſimilibus, ſuperficies majoris ad minoris ſuperficiem minorem habebit rationem quam ſolidum majus ad minus, & contra.*

Dem. Superficies ſunt ut quadrata laterum homologorum in ſolidis ſimilibus, ſolida vero ſunt ut eorundem laterum cubi. Itaque majoris lateris homologi numerum exprimat A, minoris B; dico, eſſe $A^2 : B^2 < A^3 : B^3$. Divi-

dantur antecedentes per A^2, conſequentes per B^2, fiet $1:1 < A:B$ propter $A > B$; ergo &c.

THEOREMA XXIX.

304. *Inter omnes ſphaeras conis aequalibus inſcriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam diametri baſeos habenti inſcribitur, eſt* maxima.

Dem. Sint duo coni aequales ABED, FHML (*Fig.* 113. 114), ſed conus ABED minorem habeat ſuperficiem integram quam conus FHML, iiſque inſcriptae ponantur ſphaerae CKN, IRS. Liquet, ſuperficiem coni ABED ad coni FHML ſuperficiem, minorem habere rationem quam conus ABED ad conum FHML. Sed coni ſuperficies eſt ad ſphaerae inſcriptae ſuperficiem, ut conus ad ipſam ſphaeram (296.) ergo facili adhibito ratiocinio, ſuperficies ſphaerae CKN ad ſuperficiem ſphaerae IRS minorem habebit rationem quam ſphaera CKN ad ſphaeram IRS, adeoque ſphaera CKN major ſphaera IRS (303.). Quapropter ſi inter omnes conos rectos aequales conus ABED minimam habeat ſuperficiem integram, ſphaera inſcripta CKN erit *maxima*. Sed conus iſte hujuſmodi proprietate gaudet, cùm ejus altitudo diametri baſeos duplum poteſt (244.); ergo &c.

THEOREMA XXX.

305. *Inter omnes ſphaeras conis aequali ſuperficie integra obvolutis inſcriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam diametri baſeos habenti inſcribitur, eſt* maxima.

Dem. Conis ABED, FHML (*Fig.* 113. 114.) ſuperficiebus integris aequalibus circumſeptis ſint inſcriptae ſphaerae CKN, IRS. Si conus ABED ponatur major cono FHML, erit ad hunc in majori ratione quam illius

ſu-

ſuperficies integra ad iſtius integram ſuperficiem. Sed conus eſt ad ſphaeram inſcriptam, ut coni ſuperficies integra ad ſphaerae inſcriptae ſuperficiem (296.); ergo ſphaera CKN erit ad ſphaeram IRS in majori ratione quam ejus ad hujus ſuperficiem, ac proinde ſphaera CKN major ſphaera IRS (303.). Itaque ſi conus ABED ſit omnium conorum ſuperficies integras aequales poſſidentium maximus, ſphaera etiam CKH erit omnium ſphaerarum IRS *maxima*. At conus hujuſmodi eſt tali proprietate praeditus cùm ejus altitudo baſeos diametri duplum poteſt (246.); ergo &c.

THEOREMA XXXI.

306. *Inter omnes ſphaeras cylindris aequalibus circumſcriptas, illa, quae cylindro, cujus altitudo ſubduplum poteſt radij baſeos, circumſcribitur, eſt* minima.

Dem. Circuli diametro AB (*Fig.* 77.) ita diviſo in D, ut ſit AD = 2DB, ac tam ex puncto D, quam ex alio quovis F erectis uſque ad circumferentiam normalibus DC, FE, jungantur CB, EB. Demonſtravimus (248.), conum ex revolutione trianguli BAC circa axem BC eſſe majorem quolibet cono ex revolutione trianguli BAE circa axem BE. Itaque ſi AE producatur in M, ita ut excitata normali MO occurrente diametro *AB* in O, triangulum O*A*M exurgat, ex cujus circa axem OM revolutione oriatur conus aequalis dicto cono ex triangulo BAC, patet, longitudinem *A*B ſuperficiei convexae in cono ex triangulo BAC eſſe minorem longitudine AO ſuperficiei convexae in recenſito cono aequali ex triangulo OAM, & ita ſemper. Sed in cono ex triangulo B*A*C habemus $\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$ (*ibid.*) ſive $\overline{BC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2$; ergo ex omnibus conis aequalibus, ille, cujus altitudo radij baſeos ſubduplum poteſt, minima ſuperficiei convexae longitudina afficitur. Jam verò ſi cylindros concipiamus, in quibus baſium diametri ſint AC, AM, altitudines CB, MO, iſti

cylin-

cylindri erunt aequales & diagonalis AB erit omnium AO minima; ergo quum ſphaerarum ACEB, ALMO cylindris hiſce circumſcriptarum diametri ſint AB, AO, ſphaera cylindro, cujus altitudo radij baſeos ſubduplum poteſt, circumſcripta, erit *minima*. Q. E. D.

THEOREMA XXXII.

307. *Inter omnes ſphaeras conis rectis aequali ſuperficie convexa tectis circumſcriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam radii baſeos habenti circumſcribitur, eſt minima.*

Dem. Conis rectis ABRC, DESF (*Fig.* 79. 80.) aequali ſuperficie convexa praeditis, in quibus baſium radij GB, HE, altitudines AG, DH, ſint circumſcriptae ſphaerae ABIC, DELF, quarum diametri AI, DL, & in cono ABRC ſit $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$. Ob ſuperficies convexas aequales, habemus $AB . BG = DE . EH$, unde $AB : DE = EH : BG$, pariterque $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = \overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$, ſive $AI . AG : DL . DH = \overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$, quare ducendo antecedentes in DH, & conſequentes in AG, fiet $DH . \overline{EH}^2 : AG . \overline{BG}^2 = AI . AG . DH : DL . AG . DH = AI : DL$. Sed $DH . \overline{EH}^2 > AG . \overline{GB}^2$ (242.); ergo $AI < DL$, & ita ſemper, adeoque ſphaera ABIC eſt *minima*. Q. E. D.

THEOREMA XXXIII.

308. *Inter omnes ſphaeras conis rectis aequalibus circumſcriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam radii baſeos habenti circumſcribitur, eſt* minima.

Dem. Conis rectis aequalibus ABRC, AESF (*Fig.* 79. 80.), quorum altitudines AG, DH, baſium radij GB, HE circum

circumſcriptae ſint ſphaerae *A*BIC, DELF, quarum diametri *A*I, DL, & in cono *A*BRC ponatur $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$, Erit igitur *A*B . BG < DE . EH (240.), quare *A*B : DE < EH : BG, & $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 < \overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$, ſive AI . *A*G : DL . DH < $\overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$. Multiplicentur antecedentes per DH, & conſequentes per *A*G, erit *A*I . *A*G . DH : DL . *A*G . DH < DH . $\overline{EH}^2$: *A*G . $\overline{BG}^2$, ſive *A*I : DL < DH . $\overline{EH}^2$: *A*G . $\overline{BG}^2$; ſed (*ex hyp.*) DH . $\overline{EH}^2$ = AG . $\overline{BG}^2$; ergo AI < DL, adeoque ſphaera ABIC *minor* ſphaera qualibet DELF. Q. E. D.

ADDI.

ADDITAMENTUM

309. Opere exacto, aliquot mihi in mentem venit Theorematum maxime generalium ad Geometriam ſublimiorem ſpectantium, quae in hoc additamento collocare ab utilitate non alienum duxi, ut oſtenderem, huiuſce Operis, licet elementaris, Theoremata, vel iis ſimilia ad res geometricas altioris etiam indaginis extendi poſſe. Sit itaque

THEOREMA I.

310. *Secta* AB (Fig. 37.) *bifariam in* C, *& non bifariam in* D; *dico, fore* $2\overline{AC}^{m} < \overline{AD}^{m} + \overline{DB}^{m}$, *intelligendo pro* m *numerum quemvis integrum affirmativum unitate majorem*.

Dem. Quoniam $AD = AC + CD$, $DB = AC - CD$, ſumptis harum radicum poteſtatibus quibuſcumque, factaque deinde ipſarum ſumma, Theorematis veritas ſemper conſtabit. Sic ſi hujuſmodi radicum quarta accipiatur poteſtas, earum ſumma erit $2\overline{AC}^{4} + 12\overline{AC}^{2}.\overline{CD}^{2} + 2\overline{CD}^{4} = \overline{AD}^{4} + \overline{DB}^{4}$; adeoque $2\overline{AC}^{4} < \overline{AD}^{4} + \overline{DB}^{4}$, & ita ſemper, ex permutatione ſiquidem ſignorum in duabus radicum poteſtatibus aliquid ſemper reſidui ſupereſſe debet praeter duplum poteſtatis AC, quaecumque ſit haec poteſtas; ergo generatim $2\overline{AC}^{m} < \overline{AD}^{m} + \overline{DB}^{m}$. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA II.

311. *Sit quaelibet poteſtatum ejuſdem generis invicem aequalium ſeries, ſit alia ſeries aequinumerica poteſtatum poteſtatibus primae ſeriei homogenearum non omnium invicem aequalium, cum hac conditione, ut radicum utriuſque ſeriei aggregata ſint aequalia, dico, poteſtatum invicem aequalium aggregatum eſſe* minimum.

Dem. Si negas; in ſerie poteſtatum non omnium aequalium ſint ſaltem duae poteſtates inaequales A^m, B^m. Aequales inter ſe concipe duas alias poteſtates dictis poteſtatibus homogeneas, puta R^m, R^m, quarum radices $R + R$ adaequent radices $A + B$, erit $2R^m < A^m + B^m$ (304.); ergo poteſtatum non omnium aequalium ſeries minimum non exhibet aggregatum contra hypotheſim, & ſic ſemper, quouſque omnes & ſingulae ſeriei poteſtates invicem aequales ſtatuantur. Q. E. D.

COROLLARIUM

312. Ergo ſi recta ſit in quotlibet partes omnes invicem aequales, nec non in totidem partes non omnes invicem aequales diviſa, poteſtates ejuſdem generis partium invicem omnium aequalium *minimum* conſlant aggregatum.

THEOREMA III.

313. *Exprimant* m, n *numerum quemlibet integrum affirmativum, ſed* n *ſit ſemper unitate major, & recta* AB (Fig. 37.) *ita ſecetur in* C, *ut ſit* $CB = \frac{1}{m+1} AB$;

ſum-

ſumpto quovis alio puncto D, *ajo*, *fore* $\overline{AC}^{n} + m^{n-1}\,\overline{CB}^{n} < \overline{AD}^{n} + m^{n-1}\,\overline{DB}^{n}$.

Dem. Poſitis $m=2$, $n=4$, fiet $CB=\frac{1}{3}AB$. Imaginare nunc AC per m, ſeu biſariam diviſam; comprehendet iſta ſexdecim quadrato-quadrata invicem aequalia, quorum radices ſimul ſumptae octuplum ipſius AC continebunt; quia verò $m^{n-1}=8$, etiam octo quadrato-quadrata, ſingula aequalia quadrato-quadrato $\overline{CB}^{4}$, habebunt octo radices aequales, quae octuplum radicis CB ſimul ſumptae component. Si praeterea intelligatur AD biſariam diviſa, haec, itidem ſexdecim quadrato-quadrata invicem aequalia includet, quorum radices ſimul ſumptae octuplum ejuſdem AD efficient, pariterque octo quadrato-quadratorum, quorum unuſquiſque adaequet $\overline{DB}^{4}$, radices erunt octuplae portionis DB, ac proinde vi Theorematis antec. (305.) habetur $\overline{AC}^{4} + 8\overline{CB}^{4} < \overline{AD}^{4} + 8\overline{DB}^{4}$.

Si fiat $m=3$, $n=4$, erit $CB=\frac{1}{4}AB$; quare portionibus AC, AD triſariam ſectis, ac ſimili repetito ratiocinio, invenietur $\overline{AC}^{4} + 27\,\overline{CB}^{4} < \overline{AD}^{4} + 27\overline{DB}^{4}$.

Si $m=2$, $n=5$; erit $CB=\frac{1}{3}AB$, diviſiſque biſariam AC, AD, per idem ratiocinium prodibit $\overline{AC}^{5} + 16\overline{CB}^{5} < \overline{AD}^{5} + 16\overline{DB}^{5}$; & ſic de reliquis; unde per certiſſimam inductionem tandem elicitur $\overline{AC}^{n} + m^{n-1}\,\overline{CB}^{n} < \overline{AD}^{n} + m^{n-1}$

DB

$\overline{DB}^m$, ſi generatim ponatur $CB = \frac{1}{m+1} AB$. Q.E.D.

THEOREMA IV.

314. *Si recta* AB (Fig. 131. 132.) *ita dividatur in* C, *ut ſit* $AC = mCB$, *per* m *numerum integrum affirmativum intelligendo; dico*, $\overline{AC}^m . CB$ *eſſe* maximum.

Dem. Cadat primò punctum D (*Fig.* 131.) inter puncta C, B, ac fiat $AD : AC = AC : AE = AE : AF$ &c. ita ut numerus continue proportionalium poſt AD, AC ſit *m*; erit etiam dividendo, $AD - AC : AC - AE = AC - AE : AE - AF$, nimirum $CD : CE = CE : EF$, &c. quare quum ſit $CD > CE$, $CF > EF$, & ita porro, erit $CF < m CD$, ac proinde ob $AC = m CB$ (*per hyp.*), ſtabit $AC : m CB > CF : m CD$; & permutando, $AC : CF > mCB : m CD$, ſive $AC : CF > CB : CD$; & convertendo, $AC : AF < BC : BD$. Sed $\overline{AD}^m : \overline{AC}^m = \overline{AC}^m : \overline{AE}^m = AC : AF$; ergo $\overline{AD}^m : \overline{AC}^m < CB : DB$; ſeu invertendo $\overline{AC}^m : \overline{AD}^m > DB : CB$; unde $\overline{AC}^m . CB > \overline{AD}^m . DB$; *quod erat primum.*

Cadat ſecundo punctum D (*Fig.* 132.) inter puncta A, C, & fiat $AD : AC = AC : AE = AE : AF$, &c. ita ut numerus continue proportionalium poſt AD, AC ſit *m*. Erit quoque $FE : EC = EC : CD$ &c. Quum autem ſit $EF > CE$, $CE > CD$, &c. erit $CF > m CD$, adeoque $CF : mCD > AC : m CB$; & permutando, $CF : AC > m CD : m CB$, ſeu $CF : AC > CD : CB$, & componendo, $AF : AC > DB : CB$. Sed $\overline{AD}^m : \overline{AC}^m = \overline{AC}^m : \overline{AE}^m = AC : AF$; & invertendo, $AF : AC = \overline{AC}^m : \overline{AD}^m$, ergo $\overline{AC}^m : \overline{AD}^m > DB : CB$; Ex quo

AC.

$\overline{AC}^{m}.CB > \overline{AD}^{m}.DB$, *quod erat ſecundum.* (a).

C O R O L L A R I U M I.

315. Extracta ex $\overline{AC}^{m}.CB > \overline{AD}^{m}.DB$ radice m, adhuc permanet $AC.\overline{CB}^{\frac{1}{m}} > AD.\overline{DB}^{\frac{1}{m}}$, ſtante ſemper $AC = mCB$, ſeu $CB = \frac{1}{m} AC$; quare ſi viciſſim ponatur $\overline{AC}^{\frac{1}{n}}.CB > \overline{AD}^{\frac{1}{n}}.DB$, erit $AC = \frac{1}{n} CB$, videlicet erit $\overline{AC}^{\frac{1}{n}}.CB$ *maximum*, ſi $AC = \frac{1}{n} CB$. Sed demonſtrarum fuit $\overline{AC}^{m}.CB$ tunc eſſe maximum, cùm $AC = m CB$, ergo $\overline{AC}^{\frac{m}{n}}.CB$ erit *maximum*, ſi $AC = \frac{m}{n} CB$.

C O R O L L A R I U M II.

316. Elevato ad poteſtatem n producto $\overline{AC}^{\frac{m}{n}}.CB$, prodit $\overline{AC}^{m}.\overline{BC}^{n}$, quod maximum permanet, ſi ut ante fuerit $AC = \frac{m}{n} CB$, ex quo rectam AB ita ſecare diſcimus in C, ut $\overline{AC}^{m}.\overline{CB}^{n}$ aut $\overline{AC}^{\frac{m}{n}}.CB$, aut $AC.\overline{CB}^{\frac{n}{m}}$ ſit *maximum*, ponendo nempe $AC : CB = m : n$. Co-

(a) V. *Giornale de' Letterati pubblicato in Piſa l' anno* 1757. T. VII. *Par.* I.

COROLLARIUM III.

317. Quoniam $AC = \frac{m}{n} CB$, & $AB \left(= AC + CB = \frac{m}{n} CB + CB\right) = \frac{m+n}{n} CB$, erit $CB = \frac{n}{m+n} AB$; hinc $AC = \frac{m}{n} CB = \frac{m}{m+n} AB$; quare ſi $n = 1$, nimirum ſi $\overline{AC}^{m} . CB$, ſeu $AC . \overline{CB}^{\frac{1}{m}}$ eſſe debeat *maximum*, erit $AC = \frac{m}{m+1} AB$, pariterque ſi $m = 1$, hoc eſt ſi $AC . \overline{CB}^{n}$, ſeu $\overline{AC}^{\frac{1}{n}} . CB$ debeat eſſe *maximum*, erit $AC = \frac{1}{n+1} AB$.

THEOREMA II.

318. *Si in quadrante circulari, aut elliptico* AMB (Fig. 133.), *cujus centrum C, fiat* $\overline{CP}^{2} = \frac{m}{m+n} \overline{AC}^{2}$; *dico, productum* $\overline{CP}^{m} . \overline{PM}^{n}$ *eſſe* maximum.

Dem. Duc in quadrante circulari tangentem TM occurrentem radijs CA, CB in punctis T, D. Habemus $\overline{PM}^{2} = \overline{AC}^{2} - \overline{PC}^{2} = \overline{AC}^{2} - \frac{m}{m+n} \overline{AC}^{2} = \frac{n}{m+n} \overline{AC}^{2}$. Jam vero $\overline{CP}^{2} . \overline{PM}^{2} = \overline{PM}^{2} : \overline{PT}^{2}$, hoc eſt $\frac{m}{m+n} \overline{AC}^{2} : \frac{n}{m+n} \overline{AC}^{2} = \frac{n}{m+n} \overline{AC}^{2}$.

K PT

$\overline{PT}^2 = \frac{n^2}{m(m+n)}\overline{AC}^2$; ergo $\overline{PC}^2 : \overline{PT}^2 = \frac{m}{m+n}\overline{AC}^2 : \frac{n^2}{m(m+n)}\overline{AC}^2 = m^2 : n^2$; quare valet etiam $PC : PT = m : n$; adeoque $\overline{PC}^m . \overline{PT}^n$ eſt maximum (316.). *Age* ad hypothenuſam TD rectam QE radio CD parallelam, quae circumferentiam ſecabit in N. Propter $\overline{PT}^n : \overline{QT}^n = \overline{PM}^n : \overline{QE}^n$, erit $\overline{CP}^m . \overline{PM}^n > \overline{CQ}^m . \overline{QE}^n$; ſed $NQ < QE$, & ſic ubique; ergo potiori jure $\overline{CP}^m . \overline{PM}^n > \overline{CQ}^m . \overline{QN}^n$. Jam verò ellipſeos ordinatae ſunt circuli ordinatis reſpondentibus PM, QN proportionales; ergo &c.

C o r o l l a r i u m

319. Junctis CM, CN, quoniam triangulorum rectangulorum CPM, CQN hypothenuſae CM, CN aequantur, & ob $\overline{AC}^2 = \frac{m+n}{m}\overline{PC}^2$, habemus $\overline{PM}^2 = \frac{m+n}{m}\overline{PC}^2 - \overline{PC}^2 = \frac{n}{m}\overline{PC}^2$, adeoque $m\overline{PM}^2 = n\overline{PC}^2$; ſi ab extremitatibus R, S diametri RS (*Fig.* 134.) ad circumferentiam ſemicirculi RGS duas chordas RG, GS ita conjungamus in puncto aliquo G, ut ſit $\overline{GS}^2 : \overline{RG}^2 = m : n$, evadet $\overline{RG}^n . \overline{GS}^m$ *maximum*. Pari ratione inter omnia triangula rectangula aequalibus hypothenuſis inſiſtentia, illud determinare poſſumus, in quo potentiae laterum angulum rectum efficientium inter ſe multiplicatae productum *maximum* gignant.

THEO-

THEOREMA III.

320. *Eſto parabola Apolloniana* BAD (Fig. 135.) *axem* AC *versus concava, cujus vertex* A, *&* *ordinata* BD. *Ductis quibuslibet* QM *axi* AC *parallelis, &* *ordinata* BD *terminatis, ajo, maximum productum* $\overline{BQ}^{n} . \overline{QM}^{m}$, *aut* $\overline{BQ}^{\frac{n}{m}} . QM$, aut BQ $\overline{QM}^{\frac{m}{n}}$ *tunc haberi, cum* $BQ = \frac{m+n}{2m+n} . BD$.

Dem. Ex puncto M agatur ſemiordinata MP. Erit QM ($= AC - AP$) ut $\overline{DC}^{2} - \overline{CQ}^{2}$ ex natura parabolae, ſive ut DQ . QB; quare $\overline{MQ}^{m} . \overline{QB}^{n}$ erit ut $\overline{DQ}^{m} . \overline{QB}^{m} . \overline{QB}^{n}$, ſive ut $\overline{DQ}^{m} . \overline{QB}^{m+n}$. Finge, inventum jam eſſe maximum productum $\overline{DQ}^{m} . \overline{QB}^{m+n}$, habebitur etiam maximum productum $DQ . \overline{QB}^{\frac{m+n}{m}}$ ob radicis *m* extractionem. Sed ſi ſtatuatur $\frac{m+n}{m} = p$, productum $DQ . \overline{QB}^{\frac{m+n}{m}}$ fit $DQ . \overline{QB}^{p}$, quod evadit maximum, cùm $BQ = \frac{p}{p+1}$ BD (317.), ſeu reſtitutis valoribus, cùm $BQ = \frac{m+n}{2m+n}$BD. Ergo *maximum* productum $\overline{MQ}^{m} . \overline{QB}^{n}$, aut $MQ . \overline{QB}^{\frac{n}{m}}$, aut $\overline{MQ}^{\frac{m}{n}} . QB$ obtinetur cùm $BQ = \frac{m+n}{2m+n} . BD$. Q. E. D.

 Co-

Corollarium I.

321. Si quaeratur *maximum* triangulum BMQ dictae parabolae inſcriptum, cujus vertex ſit in alterutra ordinatae BD extremitate B, erit $m=1$, $n=1$, adeoque $BQ = \frac{2}{3} BD$.

Corollarium II.

322. Si exoptetur *maximus* conus ſolido ex dictae parabolae circa axem BD revolutione genito inſcriptus, cujus vertex ſit in altera ordinatae BD extremitate B, erit $m=2$, $n=1$, quare $BQ = \frac{3}{5} BD$.

Corollarium III.

323. Si deſideretur *maximum* productum $MQ . \overline{QB}$, erit $m=1$, $n=2$, ac proinde $BQ = \frac{3}{4} BD$. Itaque ſi concipiamus, omnia triangula BAC, BMQ, quae eidem parabolae modo recenſito inſcribi poſſunt, revolvi circa altitudines AC, MQ axi parallelas, innumeri orientur coni, quorum ille, in quo baſeos radius $BQ = \frac{3}{4} BD$, erit *maximus*.

Scholion.

324. Si ponatur PM (*Fig.* 136.) proportionalis rectae AP, figura BAD evadet triangulum, in quo pariter QM ($= AC - AP$) eſt ut $DC - CQ$, nempe ut DQ, adeoque (*per Theor. antec.*) invenietur *maximum* triangulum BQM, verticem habens in puncto B, quod eidem inſcribi poſſit, ſi BD biſariam ſecetur in Q. Itidem ſi ſtatuatur, triangulum ipſum BAD circa baſim BD tanquam axem revolvi, ut ſolidum generetur, *maximus* conus inſcriptus BMQ habebitur, ſi BQ ſit ad QD, ut 1 ad 2. &c.

Dpor-

Oportet autem, ut baſis BD ita ſecta ſit a normali AC in C, ut BC excedat CD prout problematis conditio requirit, ſecus in abſurdum laberemur, ut rem conſideranti palam fiet; ſi enim quaeratur *maximum* triangulum, quod ipſi triangulo BAD inſcribi poſſit, portio BC eſſe debet ſaltem aequalis reliquae CD; ſi quaeratur *maximus* conus comprehenſus ſolido ex revolutione trianguli BAD circa baſem BD genito, portio BC eſſe debet ſaltem ſubdupla remanentis CD; & ſic de ceteris.

THEOREMA IV.

325. *Parabolae, ac paraboloides cujuſcumque ordinis in infinitum repraeſententur per aequationem* $\overline{PM}^{n} = AP$ (Fig. 137. 138.), *per* n *numerum quemvis affirmativum integrum, vel fractum intelligendo; dico, productum* $\overline{PM}^{m} . \overline{PB}^{r}$, *aut* $PM . \overline{PB}^{\frac{r}{m}}$, *aut* $\overline{PM}^{\frac{m}{r}} . PB$ *tunc eſſe* maximum, *cum* $AP = \frac{m}{m+nr} AB$.

Dem. Quoniam $\overline{PM}^{n} = AP$, erit $\overline{PM}^{m} = \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$; hinc $\overline{PM}^{m} . \overline{PB}^{r} = \overline{AP}^{\frac{m}{n}} . \overline{PB}^{r}$; quapropter ſi ponatur jam inventum eſſe quod quaeritur, extracta radice *r*, erit etiam maximum $\overline{AP}^{\frac{m}{nr}} . PB$, ac proinde ſi fiat $AP = \frac{m}{m+nr} AB$, erit ex dictis $\overline{PM}^{m} . \overline{PB}^{r}$, aut $PM . \overline{PB}^{\frac{r}{m}}$, aut $\overline{PM}^{\frac{m}{r}} . PB$ *maximum*. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

326. Si quæratur *maximum* rectangulum parabolis cujuſcumque ordinis inſcriptum, erit $m = 1, r = 1$, quare tunc evadet $AP = \frac{1}{1+n} AB$; adeoque ſi parabola fuerit Apolloniana axem verſus concava, fiet $AP = \frac{1}{3} AB$, & idcirco $PB = \frac{2}{3} AB$. Si eadem parabola Apolloniana fuerit axem verſus convexa, erit $n = \frac{1}{2}$, quamobrem $AP = \frac{2}{3} AB$, ac proinde $PB = \frac{1}{3} AB$. Si vero parabola cubica fuerit axem verſus convexa, erit $n = \frac{1}{3}$; hinc $AP = \frac{3}{4} AB$, & $PB = \frac{1}{4} AB$, &c.

COROLLARIUM II.

327. Si figuris ABC circa axem AB revolutis, expetatur *maximus* cylindrus ſolidis inde genitis inſcriptus, erit $m = 2, r = 1$, adeoque fiet $AP = \frac{2}{2+n} AB$. Itaque ſi parabola fuerit cubica axem verſus concava, erit $n = 3$, quare $AP = \frac{2}{5} AB$, & $PB = \frac{3}{5} AB$. Si vero parabola cubica fuerit axem verſus convexa, erit $n = \frac{1}{3}$; hinc $AP = \frac{6}{7} AB$, & $PB = \frac{1}{7} AB$, &c. Ergo ductis diagonalibus BM, inter omnes conos a triangulis rectangulis BMP ex figuræ ACB circa axem AB revolutione genitos habebitur *maximus*.

Co-

COROLLARIUM III.

328. Si figuris iiſdem ABC circa ordinatas BC rotatis, poſtuletur *maximus* cylindrus, qui ſolidis inde prodeuntibus inſcribi poſſit, *maximum* nempe productum PM. $\overline{PB}^2$, erit $m = 1$, $r = 2$, propterea que fiet $AP = \frac{1}{1 + 2n}$ *AB*. Ergo poſita parabola biquadratica axem verſus concava, erit $n = 4$, unde $AP = \frac{1}{9}$ *AB*, & $PB = \frac{8}{9}$ AB. Quod ſi parabola eadem biquadratica axem convexitate reſpiciat, erit $n = \frac{1}{4}$, ex quo $AP = \frac{2}{3}$ AB, & $PB = \frac{1}{3}$ *AB*. Igitur hic quoque inter omnes conos a triangulis rectangulis BMD in hujuſmodi figurarum converſione genitos *maximus* erit in promptu.

COROLLARIUM IV.

329. Si in aequatione generali $\overline{PM}^n = AP$ fiat $n = 1$, figurae *ACB* in triangula ABC (*Fig.* 139) degenerabunt, eritque $\overline{PM}^m . \overline{PB}^r$, ſeu $\overline{BD}^m . \overline{DM}^r$ *maximum* cùm $AP = \frac{m}{m + r}$ AB. Quare ſi quis *maximum* rectangulum, quod *iis* inſcribi poſſit, cupiat, habebit $AP = \frac{1}{2}$ *AB* (326.). Similiter triangulis iſtis circa axem *AP* circumductis, ſi quis velit *maximum* cylindrum, qui conis inde genitis inſcribi poſſit, reperiet $AP = \frac{2}{3}$ AB (327.); quae cum jam demonſtratis (112. 264.) apprime congruunt.

SCHOLION

330. Animadverte, $\overline{BD}^{m}.\overline{DC}^{r}$ eſſe proportionale producto $\overline{BD}^{m}.\overline{DM}^{r}$. Hinc ad hyperbolas cujuſcumque ordinis intra aſymptotos tangens, veſtigijs cel. *P. Guid. Grandi* (*a*) inſiſtendo, duci facile poterit. Sit enim OMG (*Fig.* 140.) una ex hujuſmodi hyberbolis intra aſymptotos AB, BC, cujus aequatio $\overline{BD}^{m}.\overline{DM}^{r}=\overline{BE}^{m}.\overline{EG}^{r}$. Ducta ex dato puncto M ordinata MD, fiat BD : DC $= m : r$, ſive DC $= \frac{r}{m}$ BD, jungaturque CM; haec tanget curvam OMG in puncto M. Siquidem $\overline{BD}^{m}.\overline{DM}^{r} > \overline{BE}^{m}.\overline{EF}^{r}$ (316.); ſed $\overline{BD}^{m}:\overline{DM}^{r}=\overline{BE}^{m}:\overline{FG}^{r}$; ergo $\overline{BE}^{m}.\overline{EG}^{r} > \overline{BE}^{m}.\overline{EF}^{r}$, adeoque EG > EF; quamobrem punctum F erit extra curvam OMG, & ita ſemper; ergo recta CA dictam curvam OMG in unico puncto M tanget. Q. E. D.

THEOREMA V.

331. *Sit ad omnes circulos, aliaſque curvas agnatas cujuſcumque ordinis in infinitum aequatio* $\overline{CD}^{m+n}=\overline{AC}^{r}.\overline{CB}^{s}$ (*Fig.* 141.), *ajo, maximum productum* $\overline{AC}^{t}.\overline{CD}^{u}$ *tunc haberi, cùm* $AC=\frac{mt+nt+ru}{mt+nt+rt+su}AB$.

Dem. Productum $\overline{AC}^{t}.\overline{CD}^{v}$ attollatur ad poteſtatem $m+n$ pro-

(*a*) *Epiſt. Geom. Lemm.* IX. *ad Calcem Operis* De infinit. infinitorum &c.

proveniet $\overline{AC}^{(m+n)t} . \overline{CD}^{(m+n)v} = \overline{AC}^{mt+nt} . \overline{AC}^{rv} . \overline{CB}^{sv} = \overline{AC}^{mt+nt+rv} . \overline{CB}^{sv}$, ex quo extracta radice sv, fiet $\overline{AC}^{\frac{mt+nt+rv}{sv}}$ CB.

Ergo ut habeatur *maximum* productum $\overline{AC}^{t} . \overline{CD}^{v}$, ſeu $AC . \overline{CD}^{\frac{v}{t}}$, ſeu $\overline{AC}^{\frac{t}{v}} . CD$, eſſe debet $AC = \frac{mt+nt+rv}{mt+nt+rt+sv} AB$.

Q. E. D.

COROLLARIUM I.

332. Quum ordinatis circuli cujuſcumque ordinis in infinitum ordinatae reſpondentes ellipſeos ejuſdem ordinis circa eundem axem ſint proportionales; quod de circulis cujuſcumque ordinis demonſtratum eſt, idem in ellipſibus ordinis cujuſcumque locum obtinet.

COROLLARIUM II.

333. Si quis cupiat *maximum* triangulum circulis, vel ellipſibus cujuſcumque ordinis inſcriptum, erit $t = 1$, $v = 1$; quare fiet $AC = \frac{m+n+r}{m+n+r+s} AB$; adeoque ſi ADB fuerit circulus, vel ellipſis vulgaris, erit $m = 1$, $n = 1$, $r = 1$, $s = 1$, & $AC = \frac{3}{4} AB$ prorſus ut alibi (133.) ſtatuimus. Quod ſi fuerit circulus cubicus, vel ellipſis cubica, ob $m = 2$, $n = 1$, $r = 2$, $s = 1$, erit $AC = \frac{5}{6} AB$, &c.

COROLLARIUM III.

334. Si quis poſtulet *maximum* conum ſolidis ex circu-

culorum, aut ellipſium cujuſcumque ordinis ADB revolutione circa axem AB genitis inſcriptum, erit $t=1$, $v=2$; hinc $AC=\frac{m+n+2r}{m+n+2r+2s}AB$. Quapropter ſi ADB fuerit circulus, aut ellipſis vulgaris, evadet $m=1$, $n=1$, $r=1$, $s=1$, ex quo $AC=\frac{2}{3}AB$, quod cum jampridem demonſtratis (284.) egregie conſpirat. Si vero ob $m=3$, $n=1$, $r=1$, $s=3$, circulus fuerit biquadraticus, aut ellipſis biquadratica ipſi adnexa, habebitur $AC=\frac{1}{2}AB$; vel ſi circulus iterum fuerit biquadraticus, in quo $m=3$, $n=1$, $r=3$, $s=1$, ſiet $AC=\frac{5}{6}AB$, &c.

COROLLARIUM IV.

335. Si quis quaerat *maximum* productum $\overline{AC}^2 . CD$, erit $t=2$, $v=1$, quamobrem $AC=\frac{2m+2n+r}{2m+2n+r+s}AB$. Ergo in circulo, aut ellipſi vulgari quum ſit $m=1$, $n=1$, $r=1$, $s=1$, proveniet $AC=\frac{5}{6}AB$, prout oſtendimus (147.). Quod ſi ponatur $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, $r=2$, $s=3$, inveniemus $AC=\frac{4}{7}AB$; & ſic de ceteris.

THEOREMA VI.

336. *In Curva qualibet* AM (Fig. 142.) *axem* AP *verſus concava, cujus tangens* TM *innoteſcat, ſi fiat* $TP:PB=m:n$, *ac deinde ductis ordinatis* PM, BC, *agatur* MD *parallela axi* AP, *ita ut prodeat parallelo-*

gram.

grammum PMDB; dico productum $\overline{PM}^m . \overline{MD}^n$ *eſſe* maximum.

Dem. Ductâ quavis ordinata LH, protrahantur ordinatae LH, *BC* uſque ad occurſum tangentis TM in punctis E, N, compleanturque parallelogramma LHI*B*, LEF*B*. Conſtat ex dictis (329.), in triangulo T*B*N factum $\overline{PM}^m . \overline{MD}^n$ majus eſſe facto quovis $\overline{LE}^m . \overline{EF}^n$ ſed hoc majus eſt facto $\overline{LH}^m . \overline{HI}^n$; ergo &c.

Corollarium I.

337. Si ſtatuatur $m = 1$, $n = 1$, erit *B*P = PT, adeoque parallelogrammum PMD*B* *maximum*. Ex quo viciſſim colligitur, dato maximo parallelogrammo curvae cuilibet inſcripto, tangentem duci ad ipſam facile poſſe. Si enim maximum parallelogrammum curvae AMC (*Fig.* 138. 142.) inſcriptum ſit PMD*B*, ſumpta PT = P*B*, erit PT ſubtangens, ac TM tangens. Quapropter in infinitis parabolis, ac paraboloidibus cum axem verſus concavis, tum convexis, ſubtangentes nullo negotio poſt ſuperiùs demonſtrata (326.) aſſequi poſſumus; ſiquidem ob $AB - AP = PB$, atque $AB = (1 + n)\ AP$, prodit $PB = (1 + n)\ AP - AP = n\ AP$.

Corollarium II.

338. Stantibus iiſdem, ſi figura AMC*B* circa axem A*B* revolvi concipiatur, ex maximo rectangulo PMD*B* figurae eidem inſcripto ſolidum orietur, cujus ſuperficies curva erit *maxima* comparate ad omnes ſuperficies curvas ſolidorum ex ſingulis rectangulis LI rotatis prodeuntium.

Corollarium III.

339. Si ponatur $m = 2, n = 1$, *maximum* obtinebitur ſolidum a rectangulo PMDB (*Fig.* 142.) in dictae figurae AMCB circa axem *AB* converſione genitum.

Corollarium IV.

340. Si ordinatis PM, *B*N ad angulum rectum cum axe conſtitutis, fingamus, figuram AMN revolvi circa axem *B*N, *maximum* cylindrum ſolido hinc genito inſcriptum inveniemus, ſi ſtatuamus $m = 1, n = 2$, ſeu ſi fiat P*B* dupla ſubtangentis TP. Hunc vero maximum cylindrum etiam habere poſſumus, ſi *B*N ita ſecetur in D, ut ſit ND dupla remanentia D*B*, quod eòdem recidit, nam T*B* : MD = *B*N : ND, ac propterea dividendo, TP : PB = *B*D : DN, adeoque *B*D eſt ſubdupla ipſius DN, ut fieri debet.

L E M M A

341. *Parabolae ejuſdem generis, ſeu per aequationes ſimiles expreſſae, ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum; ſolida verò ab iiſdem parabolis circa axes rotatis genita ſunt in ratione compoſita ex ſimplici altitudinum, & duplicata baſium.*

Dem. Parabolarum ejuſdem generis AM*CB*, DNFE (*Fig.* 143. 144.) altitudines A*B*, DE concipiantur diviſae per eundem numerum partium aequalium ſumme exiguarum, quarum duae ſimiliter ſitae ſint PG, QK, & agantur ordinatae PM, GH, QN, KL. Habemus AP : A*B* = DQ : DE; ſed AP : A*B* $= \overline{PM}^n : \overline{BC}^n$, DQ : DE $= \overline{QN}^n : \overline{EF}^n$; ergo $\overline{PM}^n : \overline{BC}^n = \overline{QN}^n : \overline{EF}^n$, pariterque PM : *BC* = QN : EF, & permutando, PM : QN = *BC* : EF. Finge interea, ductas eſſe tangentes TM, SN. Quoniam curvae ponuntur po-

lygo-

lygona lateribus exiliſſimis conflata, tangentes iſtae latercula MH, NL continuabunt, quare triangula TPM, SQN erunt invicem ut TP.PM ad SQ.QN, ſive ob TP $= n$ AP, SQ $= n$LQ(337.), ut AP.*PM* ad DQ.QN, ſive ut AB.*BC* ad DE.EF. Idem oſtendetur de triangulis TGH, SKL, quare convertendo, trapetium PMHG erit ad trapetium QNLK in eadem ratione conſtanti, nempe ut AB.*BC* ad DE.EF; ſed idem de ceteris trapetijs ſibi reſpondentibus, & areas parabolicas efficientibus demonſtrari poteſt; ergo tota parabola AMCB erit ad totam parabolam DNFE, ut AB.*BC* ad DE.EF; *quod erat primum*.

Imaginare nunc, figuras eaſdem circa axes AB, DE rotari. Coni a dictis triangulis TMP, SNQ geniti erunt inter ſe, ut TP.$\overline{PM}^2$ ad SQ.$\overline{QN}^2$, ſive ut AP.$\overline{PM}^2$ ad DQ.$\overline{QN}^2$, hoc eſt ut *AB*.$\overline{BC}^2$ ad DE.$\overline{EF}^2$ (*per dem.*); ſed in eadem ratione ſunt coni ex revolutione triangulorum rectangulorum THG, SLQ; ergo convertendo, etiam coni obtruncati ex trapetijs PMHG, QLNK erunt ut AP.$\overline{PM}^2$ ad DQ.$\overline{QN}^2$, ut *AB*.$\overline{BC}^2$ ad DE.$\overline{EF}^2$; quod quum de ceteris conis obtruncatis ſolida parabolarum circa axes revolutarum componentibus oſtendi poſſit, erit ſolidum ex parabola *ACMB* ad ſolidum ex parabola DNFE, ut *AB*.$\overline{BC}^2$ ad DE.$\overline{EF}^2$; *quod erat ſecundum*.

Corollarium I.

342. Completis rectangulis *ABCR*, DEFV, quoniam cylindri orti ex eorum converſione circa axes *AB*, DE ſunt ſolidis ex parabolis *AMCB*, DNFE circa eundem axem rotatis proportionales; convertendo, etiam ſolida ex parabolis externis AMCR, DNFV eodem modo rotata componentur ex ſimplici ſuarum ordinatarum RC,

VF,

VF, & duplicata ſuorum axium AR, DV ratione. Quum autem ſuperius demonſtrata ad omnes parabolas tam axes verſus concavas, quam convexas extendantur, eodem ratiocinio oſtendetur, ſolida ex parabolis AMCB, DNFE circa contingentes AR, DV ad axium *AB*, DE vertices A, D revolutis eſſe in ratione compoſita ex ſimplici ordinatarum BC, EF, & duplicata axium AB, DE.

COROLLARIUM II.

343. Spatium parabolicum APM erit ad aliud quodvis ejuſdem parabolae ſpatium ABC, ut AP. PM ad AB. BC, nimirum ut coordinatarum rectangula, & ſolidum ex ſpatio APM ad ſolidum ex ſpatio ABC in converſione parabolae *AMCB* circa axem *AB*, ut AP. $\overline{PM}^2$ ad *AB*. $\overline{BC}^2$, videlicet in ratione compoſita ex ſimplici abſciſſarum, & duplicata ordinatarum; quod facile per allatum ratiocinium evincitur, ſi ſpatium parabolicum DQN ponatur ſimile, & aequale ſpatio parabolico APM.

SCHOLION

344. Hinc parabolarum cujuſcumque ordinis conſtructio deſcendit. Sit ſiquidem ſemicirculus *AMB* (*Fig.* 145.), cujus ordinatae PM, QN. Junctis AM, AN, productiſque MP, NQ, fiat PR : QS = *AM* : AN & ita ſemper; curva, quae per puncta R, S tranſit, eſt parabola primi ordinis, ſtat enim $\overline{PR}^2 : \overline{QS}^2 = \overset{1}{AP} : AQ$, qui eſt parabolae conicae, ſeu apollonianae character, ſeu ſi parabolam hanc ex parte averſa, hoc eſt convexa, conſiderare lubeat, excitata ex diametri *AB* puncto A normali AD, ductiſque RT, SV, quae ſint abſciſſis AP, AQ parallelae, valebit

$TR : VS = \overline{AT}^2 : \overline{AV}^2$.

Eſto ARS (*Fig.* 146.) parabola primi ordinis axem

AQ

AQ convexitate reſpiciens, cujus ordinatae PR, QS. Spatium ARP eſt ad ſpatium ASQ, ut rectang. APR ad AQS; ſed PR : QS $= \overline{AP}^2 : \overline{AQ}^2$; ergo ſubſtituendo, erit APR ad AQS, ut $\overline{AP}^3$ ad $\overline{AQ}^3$. Itaque ſi fiat APR : AQS $=$ PT : QV, erit PT : QV $= \overline{AP}^3 : \overline{AQ}^3$. Curva igitur per puncta T, V traducta erit parabola ſecundi ordinis, qua ſic facillime deſcripta, haberi ſtatim poſſunt ex parte concava duo cubi in data quavis ratione.

Poſita ARS parabola ſecundi ordinis, fiat ut rectang. APR ad AQS, ita *PT* ad QV, curva ATV puncta T, V trajciens erit per idem ratiocinium parabola tertij ordinis, & ſic in infinitum.

Ex parabolarum autem cujuſcumque gradus ordinatis inverſe poſitis hyperbolarum cujuſcumque gradus intra aſymptotos, Apolloniana excepta, emergit conſtructio.

THEOREMA VII.

345. *Ex omnibus parabolis CFM, CHN* (Fig. 133, 147.) *ejuſdem generis, & cujuſcumque ordinis vertices habentibus in centro C quadrantis circularis, aut elliptici AMBC & perimetrum ANB ſecantibus, illa CFM, cujus abſciſſa* $\overline{CP}^2 = \frac{m}{m+n}\overline{AC}^2$, *maximum habet productum* $\overline{CP}^m . \overline{PM}^n$.

Dem. Parabolae *CFM*, *CHN* ſunt ut trianguli *CPM*, CQN ijs inſcripta, vel circumſcripta (341.), ſed in hiſce productum $\overline{CP}^m . \overline{PM}^n$ eſt ſemper majus producto quovis $\overline{CQ}^m . \overline{QN}^n$ cùm $\overline{CP}^2 = \frac{m}{m+n}\overline{AC}^2$ (318.); ergo &c.

Coro-

COROLLARIUM I.

346. *Si fiat* $m=1$, $n=1$, erit $\overline{CP}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2$, ſive angulus *MCP* erit ſemirectus; videlicet inter omnes ejuſmodi parabolas, illa erit *maxima*, in qua triangulum ipſi inſcriptum, aut circumſcriptum efficit in ejus vertice cum abſciſſa angulum ſemirectum.

COROLLARIUM II.

347. Si $m=1$, $n=2$, erit $\overline{CP}^2 = \frac{1}{3}\overline{AC}^2$; nempe ſi quadrans circularis, aut ellipticus AMBC circa axem AC unà cum recenſitis parabolis CFM, CHN in gyrum verſetur, inter omnia ſolida parabolica hinc emergentia, illud, in quo altitudo CP ſubtriplum poteſt radij, vel ſemiaxis AC, erit *maximum*.

COROLLARIUM III.

348. *Si* $m=2$, $n=1$, erit $\overline{CP}^2 = \frac{2}{3}\overline{AC}^2$, hoc eſt ſi eaſdem parabolas CFM, CHN cum quadrante circulari, aut elliptico AMBC circa radium, aut ſemiaxem conjugatum CB circumagi concipiamus, inter omnia ſolida ſic genita, illud, cujus maxima latitudo duos diametri circularis, aut axis elliptici trientes potentia adaequat, eſt *maximus*.

THEOREMA VIII.

Inter omnes parabolas ejuſdem generis, & cujuſcumque ordinis BEAC, BFMQ (Fig. 135.) *parabolae conicae* BAD *ordinatam integram* BD *verſus concavae, ac vertices in alterutra ejuſdem ordinatae extremitate, puta* B, *habentes; illa, in qua* $BQ = \frac{m+n}{2m+n} BD$, maximo *gaudet* *coordinatarum producto* $\overline{BQ}^n \cdot \overline{QM}^m$. *Dem.*

Dem. Parabolae BEAC, BFMQ ſunt ut triangula BAC, BMQ ipſis inſcripta (341.); ergo ex dictis (320.) res patet.

Corollarium I.

350. Si $m=1$, $n=1$, erit $BQ=\frac{2}{3}BD$; nimirum ex omnibus hujuſmodi parabolis BEAC, BFMQ illa eſt *maxima*, cujus axis BQ duos trientes occupat integrae ordinatae BD. Idem valet, ſi parabolae *A*EBC, MFBQ habeant vertices *A*, M in dictae parabolae BAD perimetro, ac per punctum B omnes tranſeant.

Corollarium II.

351. Si $m=2$, $n=1$, erit $BQ=\frac{3}{5}BD$; videlicet ſi parabola conica BAD ſimul cum parabolis BEAC, BFMQ circa ordinatam BD rotetur, inter omnia ſolida a parabolis hiſce BEAC, BFMQ genita, illud, cujus altitudo $BQ=\frac{3}{5}BD$, erit *maximum*.

Theorema IX.

352. *Inter omnes ejuſdem generis, & cujuſcumque ordinis parabolas* AVDC (Fig. 141.) *infinitis circulis* ADE *per aequationem* $\overline{CD}^{m+n}=\overline{AC}^{r}.\overline{CB}^{s}$ *expreſſis circa diametrum* AB *deſcriptas, vertices in ejus extremitate* A *habentes, & eoſdem circulos ſecantes; illa, cujus altitudo* $AC=\frac{mt+nt+ru}{mt+nt+ru+su}AB$, *coordinatarum producto* $\overline{AC}^{t}.\overline{CD}^{u}$ *maximo pollet.*

Dem. Hujuſmodi parabolae ſunt ut triangula ACD ipſis inſcripta (341.); ſed triangula iſta tunc habent maximum pro-

productum $\overline{AC}^{t} . \overline{CD}^{v}$, cùm $AC = \frac{mt+nt+rv}{mt+nt+rv+sv} AB$ (331.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

353. Si $t=1, v=1$, parabola AVDC tunc evadit maxima, cùm $AC = \frac{m+n+r}{m+n+r+s} AB$; quod etiam accidit, ſi omnes parabolae per punctum A tranſeuntes habeant vertices D in circulorum perimetris. Hic autem notes velim, omnes parabolas maximas AVDC, vertices habentes in eadem diametri AB extremitate A, per idem punctum D tranſire debere, ſi circulus ADE, cujuſcumque ſit ordinis, non immutetur.

COROLLARIUM II.

354. Si $t=1, v=2$, fiet $AC = \frac{m+n+2r}{m+n+2r+2s} AB$; hoc eſt ſi quis ex infinitis circulis ADB ſub aequatione $\overline{CD}^{m+n} = \overline{AC}^{r} . \overline{CB}^{s}$ repraeſentatis, concipiatur, una cum parabolis AVD cujuſcumque ordinis, ſed ejuſdem generis (vertices habentibus in diametri AB extremitate A, circulumque ſecantibus) revolvi circa diametrum ipſam; inter omnia ſolida parabolica hinc prodeuntia, illud, cujus altitudo $AC = \frac{m+n+2r}{m+n+2r+2s} AB$, erit *maximum*.

COROLLARIUM III.

355. Si $t=2, v=1$, erit $AC = \frac{2m+2n+r}{2m+2n+r+s} AB$;

ni-

nimirum ſi circulus ABD, cujuſcumque ſit ordinis, ſimul cum adnexis parabolis AVDC cujuslibet gradus, ſed ejuſdem generis, vertices habentibus in diametri AB extremitate A, circulumque ſecantibus, revolvatur circa rectam MN tangentem circulum in puncto *A*; inter omnia ſolida ex parabolarum converſione orta, illud erit *maximum*, quod a parabola generatur, cujus axis $AC = \frac{2m+2n+r}{2m+2n+r+s} AB$.

Corollarium IV.

356. Haec omnia locum obtinent in parabolis cujuſcumque ordinis, ſed ejuſdem generis, infinitis ellipſibus eodem modo inſcriptis; ſiquidem omnes ellipſes conſtant ordinatis, quae reſpondentibus circulorum ejuſdem generis ordinatis ſunt proportionales, ut earum generalis aequatio demonſtrat.

Theorema X.

357. *Inter omnes parabolas cujuſcumque ordinis, & ejuſdem generis ACB* (Fig. 148.) *vertices habentes in baſeos DF dimidia C parabolae* DEF *per aequationem* $\overline{HB}^n = EH$ *expreſſae, eandemque quomodocumque ſecantes; illa, cujus baſis* AB *altitudinem* EC *dictae parabolae* DEF *ita ſecat in H, ut ſit* $EH = \frac{m}{m+r} EC$, *maximo coordinatarum producto* $\overline{AH}^m . \overline{CH}^r$ *afficitur.*

Dem. Parabolae ACB ſunt ut rectangula ex coordinatis AH, HC (341.), ſive ut rectangula parabolae DEF inſcripta; ſed cùm $EH = \frac{m}{m+r} EC$, iſta rectangula maximum

ximum habent productum $\overline{AH}^{m}.\overline{CH}^{r}$ (325.); ergo &c.

Corollarium I.

358. Si $m=1, r=1$, erit $EH=\frac{1}{1+n}EC$; videlicet inter omnes parabolas *A*CB cujuſcumque ordinis, ſed ejuſdem generis, parabolae DEF cujuſvis gradus modo expoſito inſcriptas, illa, quae ipſius parabolae DEF ita ſecat in H axem EC, ut evadat $EH=\frac{1}{1+n}EC$, erit *maxima*.

Corollarium II.

359. Si $m=2, r=1$, erit $EH=\frac{2}{2+n}EC$; hoc eſt ſi figura DEF ex dictis parabolis conſtans circa axem EC revolvatur; inter omnia ſolida a parabolis ACB genita, illud, cujus baſis ita ſecat in H axem EC, ut fiat $EH=\frac{2}{2+n}EC$, erit *maximum*.

Corollarium III.

360. Si $m=1, r=2$, erit $EH=\frac{1}{1+2n}EC$; ſcilicet ſi eadem figura DEF cum adnexis parabolis circa baſim DF in gyrum ducatur; inter omnia ſolida a parabolis iſtis conflata, illud ortum a parabola ACB, cujus baſis *A*B ita ſecat in H axem EC parabolae DEF, ut exurgat $EH=\frac{1}{1+2n}EC$, erit *maximum*.

Corollarium IV.

361. Poſita $n=1$, hoc eſt parabola DEF in triangulum

lum migrante, coordinatarum productum $\overline{AH}^{m} . \overline{CH}^{r}$ tunc erit *maximum*, cùm $EH = \frac{m}{m+r} EC$, ut ſupra (329.). &c.

THEOREMA XI.

362. Si coni ABFC (*Fig.* 75) ſuperiorum ordinum (iſ nempe, qui circulos BFC aequationis generalis $\overline{EF}^{m+n} = \overline{CE}^{r} . \overline{EB}^{s}$ pro baſibus agnoſcunt) ſecentur plano, quod alteri plano ſuperficiei conicae ſuperpoſito ſit parallelum, notum eſt, ſectiones hinc genitas DFE eſſe parabolas cujuſcumque gradus (a). Hoc praemiſſo, aio, *inter omnes parabolas ab hujuſmodi ſectionibus in cono cujuſvis ordinis genitas, illam eſſe* maximam, *cujus abſciſſa* DE, *aut ordinata* EF *reſpondet diametri* CB *portioni* $CE = \frac{m+n+r}{m+n+r+s}$ CB; *quod etiam valet in conis* ABLC, *quorum baſes ſunt ellipſes* BLC *cujuſcumque gradus*.

Dem. Parabolae ejuſdem generis DFE, vel DLE ſunt in utroque caſu, ut coordinatarum rectangula DEF, ſeu DEL (341.), dummodo circulus BFC, & ellipſis BLC ſint ejuſdem gradus, facta cum omnium ordinatarum potentiis comparatione. Sed rectangula DEF, aut DEL ſunt rectangulis CEF, aut CEL proportionalia; ergo tam rectangulum DEF, quam DEL erit maximum, ac proinde tam parabola DFE in primo caſu, quam DLE in altero erit *maxima*, cùm $CE = \frac{m+n+r}{m+n+r+s}$ CB (333.). Q. E. D.

THEO-

(a) V. *Wolfii Elem. Math. Univ. Tom.* I. *Elem. Analyſ. Sect.* II. *Cap.* VI. §. 528.

THEOREMA XII.

363. *Sit ſemiellipſis Apolloniana* ADB (Fig. 149.), *cujus axis tranſverſus* AB, *foci* F, *f*, *centrum* C; *ſecta* AB *in H, ita ut ſit* $AH = \frac{1}{m+1} AB$, *ex foco alterutro, puta* F, *applicetur perimetro* ADB *recta* FD = AH, *jungaturque* Df; *dico* $\overline{fD}^{n} + m^{n-1}\,\overline{DF}^{n}$ *eſſe* minimum.

Dem. Ex natura ellipſeos habemus *f*D + DF = *A*B; ſed *A*H = DF; ergo *f*D = BH. Jam verò ex dictis (313.) $\overline{BH}^{n} + m^{n-1}\,\overline{HA}^{n}$ eſt minimum; ergo erit quoque *minimum* $\overline{fD}^{n} + m^{n-1}\,\overline{DF}^{n}$. Q. E. D.

SCHOLION

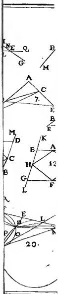
364. Ut FD = *A*H poſſit ex puncto F applicari perimetro ſemiellipſeos ADB, oportet, ut ſit AH > AF. Etenim centro C, radio C*A* deſcripto ſemicirculo AEB, productaque *f*D uſque ad circumferentiam in E, apertum eſt, ſemiellipſim ADB totam cadere intra ſemicirculum AEB, ac proinde eſſe *f*E > *f*D; ſed *f*A > *f*E; ergo potiori jure *f*A > *f*D. Eſt autem *f*D + DF = AB; ergo *f*D < *B*F, adeoque DF > AF.

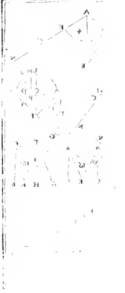
Alia id genus praeter ea, quae hoc in additamento expoſuimus, ſuppetebant Theoremata, verùm quum liber ſatis ſuccreviſſet, iſta conſultò praetermiſimus, & Tironum in hoc amoeniſſimo, ac praeclariſſimo ſtudio ſeſe naviter exercentium ſollertiae reliquimus, ut majus in iis inveniendis, colligendiſque animo capiant obiectamentum.

FINIS.

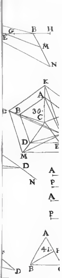
ERRATA	CORRIGE.
pag. 2. v. 3. quae duabus	quae in duabus
p. 15. v. 17. CB, ec. adeoque	CB, adeoque
p. 20. v. 14. omnium	dico, omnium
Ibid. v. 25. AE † FG	AE † EG
p. 21. v. 3. inter ſectione	interſectione
Ibid. v. 17. &c.	ergo &c.
p. 23. v. 1. *maximum*	*minimam*
Ibid. v. 2. quae	quare
Ibid. v. 9. iſoſcelis	iſoſcelijs
p. 25. v. ult. HI	HB
p. 26. v. 8. Si	Quod ſi
Ibid. v. 22. HF, HF	HE, HF
p. 27. v. 23. C	C^2
p. 30. v. 16. minimum	minimam
Ibid. v. 20. efficiunt	efficient
Ibid. v. 23. quamvis	quemvis
Ibid. v. 24. affirmatorum	affirmativum
p. 31. v. 20. enim adverte	animadverte
p. 35. v. 8. DF	DE
p. 39. v. 19. $\overline{HQ}^2$	$2\overline{HQ}^2$
Ibid. v. 20. $\overline{HS}^2$	$2\overline{HS}^2$
p. 41. v. 18. $\overline{BD}^2$ † ∢	$\overline{BD}^2$ ∢
p. 45. v. 25. dito	dico
p. 46. v. 7. AD : CD	AC . CD
p. 48. v. 9. BDEP	BDEF
p. 98. v. 18. $\overline{DB}^2$ ſunt	$\overline{DB}^3$ ſunt
Ibid. v. 19. $\overline{CB}^2$	$\overline{CB}^3$
p. 99. v. 14. ut figuris	ut in figuris
p. 160. v. 21. Inter	349. Inter

Cetera minoris momenti L. B. corriget.

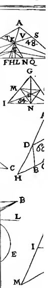


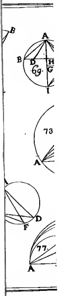


Google

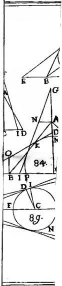

30
41

d by Google

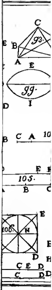

A
V
S
48.
FHLNQ
G
M
I
N
D
C
B
H
L
E
I
M



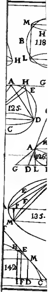
B
A
B
D
H
69.
G
I
73
A
F
D
77.
A



E B
G
N A
D
C I D
K
O
84.
B I P
D I
F C
89.
N



C
E B 93
A E
99
D I
B C A 10
E
105
A B C
E
106 N
D
E H
C E D
C D D


M
H
118
B
H L
A H G
E
125.
D
C
A
126
G D L I
E
F
F
M
135.
E
M
142
I F D C

5. 7. 220

005653804